TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS ALUNOS DO I.S.T.

N.º 157 - Junho - 1945

CIMENTO

SECIL

Fabricado pelos mais modernos processos e preferido para todos os trabalhos de responsabilidade.
Sacos de papel ou de juta com 50 Kg.
Barricas de 180 Kg.

S E C I L

COMPANHIA GERAL DE CAL E CIMENTO
RUA DO COMÉRCIO, 56, 3.º
LISBOA

São garantidos por **10 ANOS** contra o desgaste

MOSAICOS

CAVAN

AZULEJOS

de granulados de mármore

OS MAIS RESISTENTES
OS MAIS ECONÓMICOS

Soc. Portuguesa CAVAN
Rua D. Estefânia, 42
Telefone 47812 / 50129 — Lisboa
FILIAL NO PÔRTO: **RAL, LTD.**
PRAÇA DA BATALHA, 90, 2.º

Cimento «Liz» hidrofugado «N»

PRÓPRIO PARA

IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS

REBOCOS, FUNDAÇÕES, PAREDES, ETC.

Substitue com vantagem de ordem técnica e económica todos os impermeabilizadores conhecidos.

Em sacos de papel de 50 quilos

Peçam instruções para o seu emprêgo

Sede: Rua do Cais de Santarém, 64, 1.º — LISBOA
Filial: Rua de Santo António, 190-A, 1.º — PORTO

Agentes em todo o País

NÚMERO
157
Junho—1945

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS
ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Redacção e Administração: AV. ROVISCO PAIS, IST / LISBOA-N./ TEL. 49144 (linha 50)

DIRECTOR
FAUSTO GONÇALVES HENRIQUES
ADMINISTRADOR
ANTÓNIO BUSTORFF
BIBLIOTECÁRIO
FERNANDO MANZANARES ABECASIS
CORPO REDACTORIAL
J. M. Correia Vitorino
Duarte Bello
Fernando Blanqui Teixeira
Manuel Franco Falcão
João Barata Galvão
José Maria Seguro

NÚMERO AVULSO 6$00
ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	12 N.os
Continente e Ilhas	16$00	30$00	58$00
Colónias Portuguesas e Espanha...	—	40$00	70$00
Estrangeiro...	—	45$00	80$00

EDITOR E PROPRIETARIO
ASS. DOS ESTUD. DO I. S. T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NAS
OFICINAS FERNANDES
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — Novo Hospital Escolar de Lisboa. Estado das obras em Março.

		Págs.
Le tracé d'un plan d'urbanisation	Arquitecto-Urbanista Etienne de Groër	463
Torsiógrafo de Geiger	Eng.os António Gouveia Portela e José Joaquim Toscano Júnior	473
Aplicação de variáveis complexas e hiper-complexas ao estudo plano de Hidrodinâmica e de Elasticidade	Eng.º Manuel Pimentel Santos	489
A indústria de minas e o fomento e a reorganização industrial	Eng.º Eduardo José Belo Correia Pereira	516
Notas bibliográficas		518
Publicações recebidas		518

OS ARTIGOS PUBLICADOS NESTA REVISTA SÃO DE EXCLUSIVA RESPONSABILIDADE DOS AUTORES

D. MOURA — ENGENHEIRO

REPARADORA ELECTRO-MECÂNICA

Uma organização para trabalhos de electricidade

ALTA TENSÃO — BAIXA TENSÃO

Oficinas de construções eléctricas.
Transformações de características e reparações em:
GERADORES — MOTORES — TRANSFORMADORES
e em tôda a aparelhagem eléctrica para usos industriais e agrícolas.
SERVIÇO DE ASSISTÊNCIA URGENTE À INDÚSTRIA

Instalações industriais de Fôrça Motriz e Luz
Postos de transformação

Com o nosso empréstimo de máquinas temos evitado a paralização de muitas fábricas

RUA DA TRINDADE, 18-A — LISBOA
Telefone 21406
Telegramas — REPARADORA

FÁBRICAS METALÚRGICAS

(Marca Registada)

Augusto Martins Pereira

SEDE
ALBERGARIA-A-VELHA
Telef. **6** (P. B. X.
Teleg. **Alba**

ESCRITÓRIO EM LISBOA
RUA DOS CORREEIROS, 40-2.º E.
Telefone: **21319**

TÉCNICA

FAUSTO GONÇALVES HENRIQUES

DIRECTOR

ANO XX - N.º 157 JUNHO 1945

LE TRACÉ D'UN PLAN D'URBANISATION [1]

PELO ARQUITECTO-URBANISTA ETIENNE DE GROËR

Préambule

Messieurs, Mesdames et Mesdemoiselles.

Je dois d'abord m'excuser de ne pas pouvoir vous faire cette conférence en portugais, comme l'ont fait tous mes prédécesseurs, et de plus, je dois vous dire que je suis un très mauvais conférencier et que si je me permets de parler em public, c'est parce que je juge que l'Urbanisme est une chose indispensable pour chacun de nous et en même temps méconnue de la société.

Les organisateurs de ce cycle de conférences m'ont fait l'honneur de me demander de clore la série en expliquant comment est tracé un Plan d'Urbanisation.

*

L'urbaniste doit avant tout étudier et analyser son sujet dans tous ses aspects, exactement comme tous mes prédécesseurs l'ont fait devant vous:

Une ville existe, elle est située dans un milieu géographique, elle vit par raisons historiques et économiques, elle grandit et se perfectionne, ou bien se stabilise, ou bien encore — décline et périt. Elle disparait parfois par lente décadence et parfois à cause d'une catastrophe soudaine.

Une ville n'est presque jamais une agglomération au milieu d'un désert. Bien au contraire, surtout si elle est grande, elle est toujours entourée d'une banlieue, d'une série d'agglomérations secondaires, dépendantes du centre principal. Ces satellites sont soit séparés de celui-ci, soit reliés intimement avec luí.

L'ensemble forme une Région. La région lisbonnaise, par exemple.

Mais cette Région, elle-même, n'est pas absolument isolée; au contraire, elle est reliée à d'autres régions, au pays entier, aux pays voisins et même lointains, par des routes, des voies ferrées, l'eau et actuellement-l'air.

C'est pour cette raison que de nos jours le plan d'une ville n'est qu'un élément d'un plan régional, et ce dernier n'est qu'une parcelle d'un plan national.

La Norvège est le premier pays qui ait étudié un Plan National d'Aménagement (il y a 15 ans environ). Depuis, les nations principales ont créé des organismes gouvernementaux qui examinent et étudient l'ensemble et les parties du territoire national pour créer des Plans de ce genre. Tout

(1) Última conferência da série «A Cidade e os seus problemas», realizada em 24 de Abril de 1945, no Automóvel Club de Portugal.

récemment, un organisme analogue, — «A Direcção Geral da Urbanização», a été créé au Portugal.

Mais pourquoi l'Urbanisme est-il arrivé à une telle importance, qui, en somme, reflète l'esprit de notre époque — époque de l'économie dirigée? Pour le comprendre, revenons en arrière.

La création et la construction des villes en toutes pièces est une chose très ancienne.

Les Egyptiens antiques ont fait de l'urbanisme quand ils ont créé *Kahun*, une ville destinée á loger les constructeurs de la pyramide d'Ilahun. Les Grecs, les Romains ont fait de l'urbanisme, en construisant des villes selon un plan arrêté à l'avance. Les gens du Moyen-Age et de la Renaissance ont également créé des villes de cette maniére.

Il ne m'est pas possible d'examiner toute l'histoire de l'urbanisme: ce serait trop long. Je me permettrai seulement d'accentuer un point: au courant du 17ème et du 18ème siècle, des villes et des ensembles architecturaux ont été construits pour des raisons d'Esthétique ou de Gloire des Souverains, et certains sont arrivés au sublime, comme, par exemple, Versailles.

Mais notre urbanisme à nous a une base très différente: une base sociale, économique et technique.

Il ne s'agit plus pour nous de faire *uniquement* des choses jolies; il faut en même temps, et peut-être avant tout, qu'elles soient utiles, au point de vue social. Les villes sont devenues au cours des siècles des agglomérations énormes el tellement malsaines que notre premier soin doit être de sauver leur population des maladies qui la déciment et de la démoralisation qui la gagne em conséquence des misères de sa vie.

Le 19-ème siècle a été l'expression de ce qu'on appelle «la Révolution Industrielle». Ce fut la découverte de la force de la vapeur, celle des machines. Grâce à la construcion des usines, les villes commencèrent à grandir avec une vitesse et un désordre inouis comme des colonies de champignons, et à étendre leurs tentacules dans tous les sens. — En masse, les gens de la campagne ont été attirés par les villes, où ils espéraient trouver un gain facile et une vie agréable.

Au lieu de celà, ils n'ont trouvé que d'horribles logements et une détérioration physique et morale où ont sombré le goût de l'art et la santé, et où a triomphé par contre la séculation dans toutes les branches. Les statistiques de la mortalité et de la morbidité de cette époque sont terribles. — Vers le milieu du 19-ème siècle, comme l'a dit un des fondateurs de l'Institut d'Urbanisme de Paris — Mr. Bruggeman, beaucoup de villes sont devenues des monstres, caractérisés par l'absence d'air, de lumière et d'espace — les trois éléments indispensables à la vie.

Une réaction s'est faite d'abord dans le pays qui a souffert le plus de ces maux — l'Angleterre industrialisée. Une série de théoriciens ont étudié la question, et à la fin de ce même 19-ème siècle, Ebenezer Howard créa la théorie des Cités-Jardins, qui est actuellement une des bases principales de l'urbanisme moderne.

En deux mots:

La *cité-jardin* est une ville de grandeur moyenne où tout le terrain appartient à la municipalité. La ville est divisée en 4 zones: industrielle, commerciale, résidentielle et rurale. La zone rurale entoure la ville et lui sert de protection contre l'envahissement des agglomérations parasitaires. La ville est calculée pour un nombre déterminé d'habitants. Quand ce nombre est atteint, les habitants en surplus doivent créer une autre ville, ville-satellite, qui sera reliée à la ville-mère par des transports rapides et qui sera entourée à son tour par une zone rurale. Ces zones rurales séparent donc pour toujours les villes l'une de l'autre. Elles fournissent aux centres urbains des produits frais de la campagne, car ceux-ci n'ont pas le temps de s'abîmer au cours d'un long voyage.

La ville-jardin, du fait de sa dimension réduite (de 30 à 60 mille habitants) n'a pas besoin d'avoir en soi de longues lignes de transports publics. — La fatigue quotidienne des travailleurs provoquée par de longs tra-

jets est donc évitée. Aux Etats-Unis, des statistiques serrées ont démontré qu'un ouvrier, qui prend plus de 30 minutes pour arriver de sa maison au lieu de son travail, réduit considérablement sa capacité de travail.

Dans la ville-jardin, comme l'indique son nom, chaque famille occupe une maison individuelle entourée d'un jardin; excepté celà, toute la ville est baignée de verdure.

La théorie d'Ebenezer Howard a eu un très grand succès, grâce aux résultats higiéniques obtenus dans des villes faites selon ses principes. En Angleterre, c'est Letchword et Welwyn qui ont été les premiers exemples de ce genre; en Hollande — Hilversum, et aux Etas-Unis — Radburn. Ce sont des noms bien connus. En France et ailleurs, on a créé des faubourgs-jardins. Cette théorie s'est développée dans le monde entier, mais parfois avec des modifications fâcheuses.

Mais, assez d'Histoire! Voyons comment procède l'urbaniste moderne.

Quand il étudie la ville à aménager et à étendre, il a 2 problèmes à résoudre:

D'abord — l'agglomération existante à arranger; c'est toujours une malade, si elle a grandi sans plan directeur. C'est pour celà que ce problème est le plus difficile, car il faut améliorer et assainir en ne faisant que le minimum de destructions; et ceci — parce que les villes anciennes ont presque toujours quelque chose de précieux et d'artistique à conserver, un caractère individuel qu'il ne faut pas détruire. D'autre part, une démolition en grand dépasse trop souvent les possibilités financières des municipalités, et le plan devient alors une utopie.

D'ailleurs, un Plan d'Urbanisation n'est qu'un programme, et non pas un plan d'exécution. Sa réalisation graduelle est prévue pour une période assez longue (30 à 50 ans). Prévoir pour plus longtemps est impossible, car les conditions de l'existence dans le monde peuvent tellement changer que toutes nos prévisions peuvent se trouver périmées.

D'autre part, l'exécution immédiate est également une impossibilité, car aucune ville n'est assez riche pour la faire.

*

Les plans d'urbanisation sont faits pour que les habitants puissent travailler dans des lieux de travail sains, habiter des maisons saines et se déplacer commodément.

Les gens ont aussi besoin de repos. — Par conséquent, chaque ville doit posséder des espaces libres publics et privés en quantité suffisante, les uns destinés au *repos actif* — terrains de jeux et de sports pour la jeunesse, les autres, au *repos passif* (parcs et jardins). Ces espaces libres et la végétation que l'on plante dans les rues purifient et vivifient l'air dans la ville.

Les espaces libres doivent être disposés de telle façon, que chaque habitant puisse en profiter sans se fatiguer en chemin; c'est à dire, qu'il faut qu'il y ait moins de 10 minutes de marche entre sa demeure et le jardin public le plus proche.

Dans les agglomérations existantes, les espaces libres sont presque toujours insuffisants; il faut donc les conserver à tout prix et en créer de nouveaux. Ce manque d'espaces libres est d'autant plus sérieux, que les logements des vieilles villes sont toujours trop petits, mal ventilés et surpeuplés.

*

Après avoir analysé l'état existant de la vieille ville, l'urbaniste doit examiner sa population, au point de vue de sa santé, de sa croissance et de sont activité.

Il étudiera ensuite les terrains extérieurs susceptibles d'être urbanisés.

Ayant enfin tous les éléments en main, il pourra etablir les bases de son futur plan.

En vertu des statistiques démographiques et économiques, on établit un chiffre déterminé de la population que la ville aura dans 50 ans, par exemple. On fixe les densités voulues ou admissibles pour les différentes parties de la ville, selon le caractère de chacune de ces parties.

Ces chiffres nous donneront la superficie de la future ville et les limites de son extension. Alors, nous pourrons l'entourer de la zone rurale protectrice.

A ce moment, nous pourrons aussi diviser notre plan d'urbanisation en diverses zones. Chaque zone sera destinée à une fonction urbaine déterminée, pour éviter le chaos et le désordre, nuisibles pour tous.

Dans une grande ville et une capitale, comme Lisbonne, les zones peuvent être nombreuses. Mais dans tous les cas, il y aura toujours une Zone Centrale, ou Commerciale et Administrative, où seront concentrées ces deux activités. Cette zone centrale est presque toujours située dans la vieille partie de la ville, où se trouvent généralement les édifices publics et les monuments historiques.

Autour de cette zone, seront disposées les zones d'habitation de diverses natures. Toutefois, là aussi, il faudra prévoir de petites zones commerciales locales, où se trouveront les boutiques, un petit marché, les salles de spectacles et de réunions et les petites administrations locales — postes, police, garages publics, etc. — Ces petits centres locaux peuvent être étudiés comme des ensembles architecturaux, formant le point d'attraction de la zone donnée.

Par contre, les zones d'habitation proprement dites seront libres de toute activité industrielle et commerciale. — Elles doivent occuper environ 85 % de la superfície construite de la ville.

Les zones industrielles et commerciales occuperont donc le reste, soit environ 15 %.

Les zones industrielles seront disposées de façon à ce que les vents dominants de la région emportent les fumées et les mauvaises odeurs au-dehors de l'agglomération. — Dans ces zones, aucune habitation ne doit être autorisée; seuls les gardians des usines et des dépôts peuvent y habiter avec leurs familles.

Les zones industrielles peuvent en général être divisées en 2 catégories: premièrement — celle où sont permises les usines classées en France comme usines insalubres et incommodes de 1ère classe, comme les tanneries, les usines qui fabriquent les acides, l'ammoniaque, les produits très inflammables ou explosifs, la transformation des déchets organiques, etc. — Cette zone doit être disposée aussi loin que possible de la ville, de préférence à la campagne, sur de très grands terrains, pour ne pas gêner les voisins; la seconde catégorie est celle où l'on installe des industries moins désagréables. Toutefois, cette zone industrielle, permise dans la périférie de la ville, doit être séparée des autres zones par une ceinture verte plantée d'une manière dense, afin que les bruits et les odeurs des usines soient atténués an possible.

Les zones d'habitation sont également de caractères différents. Dans les vieux quartiers, on conserve la construction en ordre continu. Mais dans les quartiers nouveaux, on fera surtout des habitations dispersées et entourées de jardins.

Les lots auront des dimensions variables, mais avec un minimum déterminé et un maximum de surface bâtie fixé entre 5 % et 20 % de la surface totale du lot.

*

Je ferai ici une parenthèse pour vous expliquer pourquoi je préconise pour l'habitation des maisons unifamiliales et pourquoi je m'occupe spécialement des dimensions des lots et de leur surface bâtie.

Depuis toujours les villes ont subi l'influence de l'art militaire. Les villes étaient entourées de murs d'enceinte, et les gens se blottissaient à l'intérieur de ces murs, en vue d'attaques, sur une surface aussi petite que possible. C'était l'époque des villes denses et concentrées.

Au XIXème siècle, c'est l'esprit mercantil et la spéculation sur les terrains qui maintenaient les villes denses et hautes. Ces villes ont bien payé cette erreur au cours de la guerre qui vient de s'achever.

L'invention de l'aviation militaire entraîne au contraire la nécessité de disperser la construction, pour diminuer les dégâts. Ces considérations d'ordre militaire concordent avec les exigences de l'hygiène et avec les tendences des urbanistes, qui depuis le Congrès International de Vienne, de 1910, jusqu'à celui de Stockholm, de 1938, ont toujours confirmé que la maison individuelle était la meilleure qui convienne à une famille, quelle que soit la classe à laquelle celle-ci appartient. Cette forme

d'habitation n'est pas seulement la plus saine et la plus agréable, mais également — la meilleur-marché; le Congrès de Stockholm, que je viens de citer, et celui de Paris, de 1937, l'ont démontré. Les Suédois nous ont exposé à ce congrès ce qu'avait réalisé en ce domaine la municipalité de leur capitale, Stockholm. — Pour combattre la chèrté des loyers, dûe à la spéculation, cette municipalité entreprit depuis 1906 une politique, appelée «politique foncière», qui devint un exemple pour beaucoup d'autres villes. Voici ce qu'elle fit et ce qu'elle continue à faire: elle acheta de grands terrains suburbains, elle les aménagea entièrement et les pourvut de transports publics. Ensuite, elle les loua pour 60 ans, ce qui eut un succès immense et supprima en quelques années la chèrté des terrains en ville. Excepté celà, la municipalité donne aux ouvriers un emprunt allant jusqu'à 90 % de la valeur de la maison, leur fournit les projets et la surveillance technique. Elle leur vend des matériaux à prix réduits et encourage les futurs locataires à travailler eux-mêmes, avec leurs familles, à la construction de leur maison, en déduisant la valeur de ces heures de travail de leur emprunt. — Comme résultat, l'ouvrier devient propriétaire d'une maison de 3 ou 4 pièces principales, avec chauffage central et tout le confort, et paie pour cette maison moins qu'il n'aurait payé à Stockolm-même pour une seule chambre.

Ce résultat est probant. Aussi le genre des maisons d'habitation adopté dans les cités-jardins est-il celui que nous préconisons toujours pour l'avenir.

Avant cette guerre, il existait une école d'urbanistes qui affirmaient avoir trouvé des avantages dans la construction d'habitations très hautes. Leur argument principal était le suivant: Si l'on construit des gratte-ciel, on peut laisser entre eux de grands terrains libres qui pourraient être transformés en parcs et en terrains de jeux magnifiques, et l'aeration de la ville peut être très bonne, malgré la grande densité des maisons.

Economiquement et même matériellement, ces affirmations se sont montrées erronées. On a fait beaucoup d'expériences de ce genre, entre autres aux environs de Paris (cités de Drancy et de Chatenay-Malabry)et à Amsterdam.— La construction d'une maison haute de ce genre revient très cher, et on est obligé de faire payer des loyers 3 fois plus grands que dans les bâtiments ordinaires, de 3 étages, par exemple. L'obligation de construire une batterie d'ascenseurs et d'entretenir un personnel spécialisé augmente encore le prix des logements. La commodité de vie et la sécurité des locataires dépendent du bon fonctionnement des ascenseurs. En cas d'incendie, la situation devient tragique. Excepté celà, si les gratte-ciel sont très espacés, les communications entre eux font perdre plus de temps qu'entre des maisons basses.

Les grands jardins publics entre ces maisons demandent à être entretenus par la Ville, les canalisations d'égoûts et d'eau potable doivent avois de grands diamètres, vu la concentration très forte des habitants sur une toute petite surface; les rues doivent être faites très larges et sont par conséquent très coûteuses; tout celà augmente beaucoup les dépenses de la ville et par suite-les impôts.

A ce propos, il est intéressant de connaître ce qui si passe en Angleterre, où le gouvernement donne aux villes des subsides pour couvrir les frais de construction des logements économiques ouvriers. Ce gouvernement doit donner des subsides 2 fois plus grands pour des maisons à étages que pour les «cottages» (maisons à une famille), ce qui prouve, sans contredit, que la maison individuelle coûte 2 fois moins qu'une simple maison à 3 ou 4 étages, comme on en fait en Angleterre. Or, les logements dans les gratte-ciel coûtent encore 3 fois plus. Vous voyez pourquoi je n'en suis pas partisan.

*

Pour établir les zones d'habitation, nous en ferons de 3 catégories: zones ouvrières, zones de la classe moyenne et zones de la classe aisee. Dans chacune d'elles, nous fixerons un minimum pour la surface des lots; une seule maison unifamiliale pourra être construite sur chaque lot.

Les maisons peuvent être groupées, ou

accollées, par 2, 3, 4, 5 et 6, ce qui permet de diminuer les lots du milieu du groupe et d'augmenter un peu la densité.

Dans la zone ouvrière, le lot doit avoir au moins 250 - 300 m. carrés, selon le type de la maison. Une maison individuelle de la classe moyenne doit avoir un terrain de 600 à 1000 mq.; et celle de la classe aisée — un terrain d'au moins 1500 m. carrés. Dans les climats chauds, les terrains doivent obligatoirement être encore beaucoup plus grands. A Elisabethville (Congo Belge), les lots pour les blancs ont 2400 mq, à Nairobi (Kenya Anglais), ils ont même 8000 mq.

La superficie qu'il sera permis de bâtir n'ira pas au-delà de 5 ou de 20 °/₀ du lot, selon la zone.

Un groupe de lots entourés par 4 rues forme un îlot (quarteirão, en portugais). Nous considérons l'*îlot* comme l'unité la plus petite dans une ville; l'apparence du plan variera selon les dimensions que nous donnerons à l'îlot. Plus l'îlot sera petit, plus les rues seront nombreuses. Or, il existe un minimum pour la superficie de l'îlot au-delà duquel la superficie de la voirie (dos arruamentos) devient trop importante et cesse d'être économique, au point de vue de sa construction et de son entretien, — chose qui est malheureusement peu connue.

Les personnes qui divisent leur terrain s'imaginent toujours que plus elles le subdiviseront, plus elles en tireront de profit. Or, elles se trompent beaucoup, surtout lorsque c'est la même personne qui construit les rues et qui fait la division du terrain en lots. Dans le cas contraire, c'est la Ville qui paie les défauts du lotissement, aux dépens de la communauté.

Je peux vous citer un exemple frappant à Alto-Estoril, ou la subdivision du terrain a été faite en lots de 12 m. × 12 m. entrecoupes de rues. Cette division ne permet de construire sur chaque lot qu'une maison sans aucun jardin et entourée de rues sur ses 4 côtés, de sorte que la superficie de la voirie devient superieure à la somme des lots. Dans le lotissement que je vous décris, la circulation se montra presqu'impossible, car tous les 12 m. il y avait un croisement. La municipalité dut réunir les lots par 6 et par 8 et supprimer les rues intermédiaires. Et même maintenant, la circulation à cet endroit est incommode; il y a encore beaucoup trop de rues, car les maisons son desservies chacune par plus d'une rue. Or, une seule rue est bien suffisante pour desservir une maison!

*

Mais revenons au Plan.

Ce n'est qu'après avoir déterminé sa superficie totale et calculê et distribué les diverses zones, que nous pouvons étudier et établir la voirie nouvelle, en examinant la voirie existante.

En premier lieu, nous devons étudier l'ossature principale du plan: les sorties de la ville, leurs relations avec l'exterieur et entre elles. Souvent, il est necessaire d'établir une avenue de jonction pour faciliter la circulation.

Presque toujours, le centre présente des difficultés de circulation. — L'élargissement des rues est la derniére des choses à faire. C'est un procédé extrêmement coûteux et qui ne donne souvent qu'un allègement provisoire. Car, si après l'élargissement on permet de construire sur cette rue des maisons plus denses et plus hautes que les anciennes, on revient rapidement à l'ancien encombrement de la circulation. — Il est donc préférable et plus économique de trouver une parallèle nouvelle, sur des terrains non bâtis.

Les urbanistes divisent les rues en plusieurs catégories. Il y a d'abord les rues de grande circulation. Ces rues different fortement des routes de grande circulation. Le mouvement dans ces rues ne peut jamais être aussi rapide qu'à la campagne, à cause des croisements indispensables, qu'il faut toutefois établir aussi peu nombreux que possible, à cause du mouvement des piétons, à cause des voitures arrêtées devant les maisons, etc. Circuler en ville à 100 à l'heure est une chose inconcevable. Les rues de grande circulation son larges (3, 4 ou 6 files de voitures) et elles doivent être droites dans la mesure du possible, mais jamais par principe. En effet, les rues doivent toujours être tracées conformément au relief du sol,

en suivant tant que possible les courbes de niveaux, car autrement, les terrains adjacents se trouvent soit au-dessus, soit (et parfois fortement) au-dessous du niveau de la rue. Ce genre de voie — droite malgré les irrégularités du sol — coûte très cher à cause des talus, des murs de soutènement et des autres œuvres d'art à faire, et rend difficile et souvent impossible la construction des maisons, qui en principe devraient pouvoir être faites des deux côtés d'une rue afin que celle-ci serve à quelque chose de plus qu'uniquement à la circulation.

Il est donc sonvent préférable de ne pas insister sur la ligne droite. D'ailleurs, les voies courbes donnent souvent un aspect infiniment plus artistique que les droites, car on y voit les façades en perspective agréable.

Les voies de grande circulation doivent aussi être solidement établies. Pour toutes les raisons que je viens de mentionner, elles sont coûteuses. L'urbaniste doit donc n'en dessiner que le minimum indispensable. En général, étant donné que la voirie est chère à construire et chère à entretenir, le meilleur plan sera celui qui aura le minimum de rues, juste autant qu'il est nécessaire d'en avoir.

Après les rues de grande circulation, nous établirons les rues intermédiaires qui relieront les quartiers entre eux.

Enfin, nous aurons à faire le réseau des rues appelées «rues d'habitation». Ce sont celles dont le but unique est de desservir les maisons qui les bordent. Ces rues sont toujours les plus nombreuses, mais elles doivent être faites de façon à ne pas attirer vers elles la circulation. Elles peuvent par conséquent être étroites, irrégulières, pavées légèrement, ce qui les rend économiques à construire.

C'est surtout dans le tracé des cités-jardins que les urbanistes ont créé des formes nouvelles de rues d'habitation; certains de leurs aménagements leur donnent des aspects vraiment artistiques. Dans les rues de ce genre, on évite de couper les arbres existants; parfois, pour garder un arbre, la rue entière s'élargit ou se courbe; parfois ce sont les maisons qui reculent pour lui laisser de la place.

Dans les villes que l'on arrange selon un plan d'urbanization moderne, on construit généralement les bâtiments en retrait de l'alignement; la largeur de ce retrait dépend des proportions de la rue. On obtient ainsi devant la maison un petit jardin qui représente de nombreux avantages: il éloigne les habitants des passants, il permet de mettre plus d'espace entre les façades sur rue, malgré l'étroitesse de la chaussée; enfin, il préserve la maison de la poussière. Grace à ces petits jardins, la municipalité peut facilement élargir une rue, en cas de nécessité, sans démolir les constructions.

Il existe une forme de rue d'habitation très aimée dans les pays anglo-saxons: c'est l'impasse courte, terminée par une petite place, pour que les voitures puissent tourner, autour de laquelle sont disposées les maisons. Les petites places intérieures de ce type ont beaucoup de qualités: elles offrent aux habitants beaucoup d'intimité et de tranquillité; elles permettent d'établir économiquement les égoûts et les autres canalisations, en les faisant en éventail; grâce à elles, les maisons ont beaucoup d'espace devant elles et souvent une vue agréable; l'aspect de ces petites places est parfois tout à fait charmant.

*

Après avoir tracé les rues, l'urbaniste doit choisir des emplacements commodes pour les futurs édifices publics e les divers établissements à prévoir, comme hôpitaux, asiles, etc.

Il est nécessaire aussi d'établir un réseau d'écoles primaires, disposées de manière à ce que chaque enfant puisse atteindre une école en 10 minutes de marche au maximum. Les écoles doivent être construites sur de larges terrains, afin de comporter des cours de récréation de dimensions convenables et des jardins scolaires. On les dispose de préférence à côté des espaces libres publics pour qu'elles aient plus d'air; Ceci permettra d'agrandir les écoles à l'avenir — chose presque toujours inévitable.

En ce qui concerne les futurs édifices publics, il faut avoir en vue que le plus nécessaire à faire dès l'approbation du plan

d'urbanisation est de leur réserver des emplacements à l'avance, même lorsqu'il n'y a aucune nécessité de construire immédiatement. Ces terrain serviront provisoirement comme espaces libres. Le bénéfice sera qu'ils auront été achetés à bon-marché, au moment où le terrain était encore vendu au prix agricole. Si la municipalité n'achète pas ces terrains à l'avance, mais seulement lorsque la nécessité deviendra urgente, elle cherchera en vain des terrains convenables : ils seront toujours trop petits, trop chers ou mal situés, et elle sera réduite soit à faire les choses n'importe comment, soit à démolir des maisons au prix d'or.

*

Il nous faut aussi rechercher des terrains susceptibles de devenir des espaces libres publics. On considère actuellement qu'il est nécessaire qu'il y ait pour chaque habitant entre 30 et 40 m. carrés d'espace libre. La superficie totale de ces espaces peut être à moitié constituée par un ou plusieurs parcs situés au-dehors de la ville et destinés aux promenades dominicales. La seconde moitié de leur surface totale doit être composée par des terrains de jeux et de sports et par des jardin publics, situes dans la périférie urbaine. Le chiffre de 30 ou 40 mq. a été établi pour des villes où une grande proportion des habitants demeure dans des maisons individuelles. Quand la ville est constituée par des maisons hautes et sans jardins, la proportion d'espaces libres doit être bien plus grande.

*

Maintenant, nous avons tracé en pensée un plan d'urbanisation. Mais en réalité, ce serait une peine perdue et une profusion de dessins inutiles, s'il n'existait pas pour soutenir notre projet une législation urbaine correspondant aux données de notre plan.

Cette législation doit en principe être constituée de trois parties : Règlement des Zones, Règlement du Lotissement et Règlement de la Construction. Nous savons déjà ce que sont les zones. Quant au lotissement, c'est l'action de diviser le terrain nu en rues et en lots. Une activité de ce genre est extrêmement dangereuse pour la ville lorsqu'elle est exercée par l'initiative privée, car le lotisseur ne pense qu'à son intérêt personnel et peus ainsi détruire toute l'harmonie d'une ville. A Genève et à Lisbonne c'est la municipalité seule qui peut faire les projets des lotissements, et c'est la meilleure solution, à condition que la Ville ait un bureau permanent d'urbanisme, dirigé par des techniciens compétents.

Un Règlement de Construction existe déjà dans la plupart des villes ; mais actuellement, nous comprenons la chose très différement. D'ailleurs, ce règlement doit être en harmonie avec les deux autres règlements dont je viens de parler.

Il existe, dans tout règlement de construction, des parties très éloignées de l'urbanisme, comme les chapitres concernant la qualité des matériaux, les droits de construire, les taxes municipales ou les divers permis et amendes. Nous ne nous en occupons pas. Ce qui nous intéresse spécialement c'est la législation sur la *pièce d'habitation*.

Nous appelons «pièce d'habitation» tout local qui est occupé par un être humain journellement, pendant plusieurs heures du jour ou de la nuit. Ainsi — la cuisine et l'atelier sont des pièces d'habitation.

Nous établissons des dimensions minimales pour chaque pièce de cette catégorie : 9 m. carrés, par exemple, pour une chambre à coucher. — Chaque pièce d'habitation doit avoir au moins une fenêtre verticale donnant sur l'extérieur. Il doit y avoir devant sa fenêtre un espace, appelé «vue directe», dont la profondeur doit avoir au moins 4 m., lorsque la hauteur du mur opposé ne dépasse pas 4 m., et plus, si cette hauteur est plus grande. — La profondeur de la pièce d'habitation ne doit pas dépasser la profondeur de la vue directe, et dans tous les cases — une fois et demie ou deux fois la hauteur de la pièce, etc., etc.

Je ne vous décrirai pas ce règlement dans tous ses détails, parce que ce serait long et fatigant en ce moment. Je vous dirai seulement en un mot que le Règlement de la

Construction, tel que je le comprends doit servir à rendre sains le logement et le lieu de travail de l'habitant.

*

Je m'aperçois qu j'ai presque laissé passer le côté esthétique de l'urbanisme, mais nous ne devons pas oublier que les beaux paysages urbains agissent sur la mentalité des habitants d'une manière bienfaisante et entretiennent en eux la santé morale. On peut et on doit faire des maisons et des villes belles, et ceci est indépendant du prix et de la richesse apparente des choses.

*

Mais vous me direz: «Ces beaux plans, c'est de la théorie et même de l'utopie». En effet, la réalisation d'un plan est une grande entreprise très complexe. En pratique, il se présente constamment des cas très difficiles à resoudre, et une législation urbaine générale doit pourvoir les municipalités de lois spéciales qui leur faciliteraient leur tâche. Par exemple:

Comme une ville ne peut jamais exécuter d'emblée tous les travaux qu'indique un plan d'urbanisation, il existe des lois appelées «Lois sur l'*Expropriation Différée*», qui permettent aux villes dès l'approbation du plan d'urbanisation, de *réserver* les terrains qui leur seront nécessaires; en même temps, un terme assez long (de 15 à 30 ans, en France) leur est concédé, pour effectuer l'expropriation et le paiement qu'elle implique; en Suisse, par exemple, l'expropriation peut être ajournée tout simplement jusqu'au moment où la Ville pourra ou voudra la faire. — Ces lois sont d'une grande utilité lorsqu'on veut réaliser un plan.

Quand on exproprie des maisons insalubres, en France, c'est seulement le terrain et les matériaux de démolition qui sont payés; la maison par elle-même est considérée comme n'ayant pas de valeur. En Suisse, la location d'une maison insalubre est même envisagée comme un crime, et le propriétaire qui s'avise à louer une pareille maison est jugé et condamné.

Mais voici encore un difficulté qui se présente souvent: l'urbaniste trace les rues selon les nécessités urbaines, et il ne peut pas toujours tenir compte des limites des propriétés, dont la forme est d'ailleurs parfois mauvaise et ne permet pas d'élever une construction correspondant aux exigences d'un règlement moderne. Dans ce cas, on utilise les lois dites «sur le *Remembrement*». Voici en quoi consiste cette opération: on réunit en un seul bloc toutes les propriétés par lesquelles passera, par exemple, une rue nouvelle; après l'exécution de cette rue, chaque propriétaire reçoit une parcelle de terrain, de bonne forme, dont la superficie est proportionnée à l'importance de son ancienne propriété, mais dont les dimensions sont naturellement inférieures à celle-ci, puis que l'on a déduit du total des lots la surface nécessaire à la nouvelle rue. Malgré la perte de surface, chaque propriétaire est avantagé, vu l'amélioration du quartier. — Le remembrement a le grand mérite d'éviter l'expropriation; de plus, toutes les dépenses des propriétaires sont généralement couvertes par la plus-value de leurs nouveaux terrains.

Pour réaliser un plan, les municipalités doivent se faire un programme d'exécution échelonné sur de nombreuses années. Le procédé le plus avantageux pour la municipalité est d'ouvrir chaque année un quartier nouveau proportioné au nombre des maisons que demande la croissance de la ville, et d'autoriser la construction dans ce quartier seulement. Alors, dans une année, le quartier est complètement construit et habité. Celá permet à la Ville d'en prévoir à l'avance tous les services publics, écoles, transports, etc. Dans le cas contraire, lorsque la cité s'étend dans tous les sens, d'une manière désordonnée, nous voyons des rues aux trois-quarts vides, non pavées, non éclairées, qui rendent le nonveau quartier lamentable et en éloignent les futurs habitants.

— Naturellement pour chaque ville à urbaniser il faut prévoir les égoûts, l'eau, l'électricité, le gaz, etc. Ces études sont faites par des spécialistes de chacune de ces branches, mais en contact avec l'urbaniste,

ou après l'achèvement de son Plan Directeur.

*

Notre tâche commune ne se borne pas à celà:

Quand la ville a été reconstruite selon toutes nos exigences, les meilleurs logements peuvent être rapidement détériorés et surpeuplés, et devenir à nouveau des taudis. C'est pour celà que les municipalités doivent organiser des contrôles pour surveiller les habitants dans la manière dont ils utilisent leurs logements. Nous considérons qu'un logement est surpeuplé lorsque chaque pièce d'habitation est occupée par plus de 2 personnes.

*

Voici les principes qu'un urbaniste et qu'une municipalité doivent appliquer à l'étude, l'exécution et l'entretien d'une ville. J'ai essayé de les résumer autant que possible.

TORSIÓGRAFO DE GEIGER

Interpretação dos torsiogramas na determinação do grau de irregularidade

PELOS ENG.os MECÂNICOS (I. S. T.)

ANTÓNIO GOUVEIA PORTELA
JOSÉ JOAQUIM TOSCANO JÚNIOR

Descrição do torsiógrafo

O torsiógrafo do Dr. Geiger é essencialmente constituído por um *volante* e um *tambor* recebendo êste último o movimento de rotação da máquina a ensaiar, por intermédio de uma correia. Tanto o tambor como o volante rodam em rolamentos de esferas em tôrno do mesmo eixo e estão ligados entre si por uma *mola em espiral, A*. A posição relativa dêstes dois órgãos é assinalada por um *estilete* com tinta que traça sôbre uma fita de papel um diagrama. Esta fita tem um movimento de translação de velocidade regulável que é dado por um mecanismo de relojoaria ou pelo próprio movimento do tambor. O *estilete*

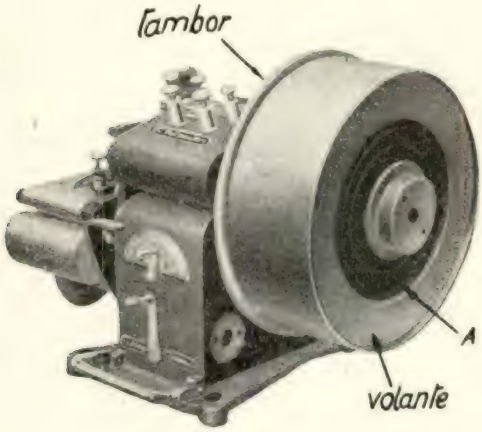


Fig. 1

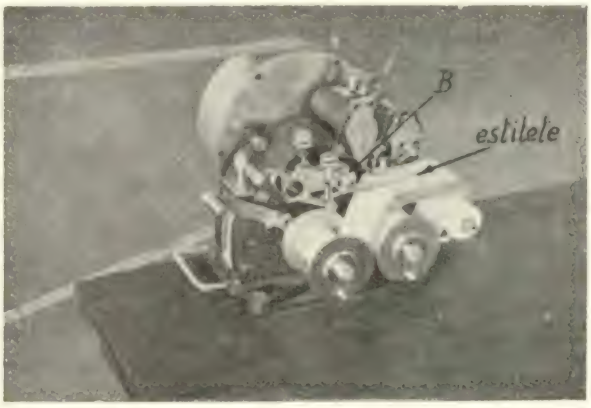


Fig. 2

é comandado por uma *agulha* que uma *mola em hélice B* encosta a um sistema de duas pequenas alavancas que têm dois pontos sujeitos, estando um ligado ao tambor e o outro encostado a uma espera do volante.

Uma vez lançado o aparelho e tendo êste atingido a velocidade de regime, o volante, devido à sua massa apreciável, tenderá a rodar com velocidade uniforme enquanto que o tambor irá acompanhando as variações de velocidade do veio da máquina. Estas variações de velocidade dão lugar a modificações sucessivas da posição relativa do tambor e do volante que são registadas na fita de papel, como já dissemos.

Obtemos, assim, um diagrama que representa, em função do tempo, os espaços percorridos pelo tambor em relação ao volante.

Os deslocamentos reais são ampliados, sendo o factor de ampliação variável com a posição do eixo do estilete. Êsse factor de ampliação relaciona os deslocamentos registados com os verificados na periferia do tambor.

A) Método do Dr. Geiger

Vamos começar por descrever o método universalmente usado na determinação do grau de irregularidade.

Consideremos, no torsiograma obtido, uma oscilação e tracemos as tangentes de coeficientes angulares extremos.

Sendo z o comprimento representativo da unidade de tempo, a_{pos} representará a

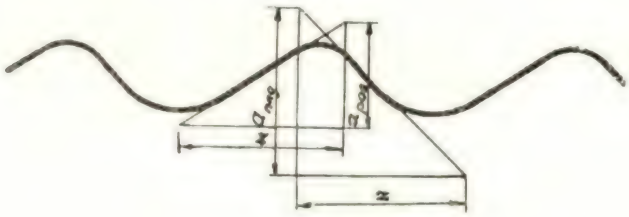


Fig. 3

velocidade mínima verificada na oscilação considerada e a_{neg} a velocidade máxima. O grau de irregularidade será dado pela expressão

$$\delta = \frac{a_{pos} + a_{neg}}{V_m}$$

Nos casos em que o diagrama se não afasta muito da forma sinusoidal, o grau de irregularidade pode ser calculado, com bastante aproximação, pela expressão

$$\delta = \frac{a \cdot w \cdot f}{V_m}$$

sendo,

a — amplitude da oscilação;
w — velocidade angular da máquina;
f — número de oscilações do diagrama por cada rotação da máquina;
V_m — velocidade média da máquina.

Neste método admitem-se implìcitamente duas hipóteses:

1.ª — O movimento da periferia do tambor do aparelho do Dr. Geiger segue o movimento da máquina ensaiada, ou seja, a correia não tem *escorregamentos* apreciáveis e está suficientemente *tensa* e é bastante *inelástica* para que sejam desprezíveis as suas deformações.

2.ª — O movimento do tambor em relação ao volante no aparelho do Dr. Geiger é, em função do tempo, igual ao movimento da máquina em relação ao movimento uniforme de velocidade igual à sua velocidade média.

O método do Dr. Geiger baseia-se, portanto, na convicção de que, construindo um volante com um momento de inércia grande, se poderão desprezar os impulsos das molas que o ligam ao tambor.

B) Método aplicado no Laboratório de Máquinas do I. S. T. (Método B)

A dúvida da legitimidade da 2.ª hipótese em que assenta a determinação do grau de irregularidade pelo método de Geiger levou-nos a procurar determinar a acção das molas sôbre o volante.

A *velocidade absoluta* do tambor do torsiógrafo será, em rigor, igual à soma da *velocidade relativa* com a velocidade do volante que é, em relação àquela, uma *velocidade de transporte*. Temos, portanto,

$$V_a = V_r + V_t$$

A *velocidade relativa* é dada pela expressão

$$V_r = \frac{d\alpha}{dt}$$

em que $\frac{d\alpha}{dt}$ se obtém por derivação do diagrama do torsiógrafo.

Mas o mesmo diagrama também representa em função do tempo, as deformações das molas do aparelho e, por conseguinte, as fôrças que se exercem sôbre o volante. Estas fôrças dão lugar, por seu turno, a acelerações β do volante cujos valores podem assim ser obtidos a partir do diagrama. Dêste modo a *velocidade de transporte* do volante será:

$$V_t = \int \beta \, dt$$

e teremos, para *velocidade absoluta,* a expressão

$$V_a = \frac{d\alpha}{dt} + \int \beta \, dt$$

e para *grau de irregularidade*

$$\delta = \frac{\left[\frac{d\alpha}{dt} + \int \beta \, dt\right]_{max} - \left[\frac{d\alpha}{dt} + \int \beta \, dt\right]_{min}}{V_m}$$

Os valores de $\frac{d\alpha}{dt}$ determinam-se imediatamente por derivação gráfica, pois já conhecemos as escalas tanto dos deslocamentos como do tempo, que se encontram marcadas no aparelho e que se escolhem quando do ensaio. Não acontece o mesmo com a segunda parcela. Não conhecemos as *escalas das acelerações* nem a *ordenada* em relação à qual devemos fazer a integração, porque, não sendo necessário determinar a velocidade de transporte pelo método do Dr. Geiger, êstes elementos não são fornecidos pelo construtor.

Vamos começar, portanto, por fazer a sua determinação.

I) Determinação das escalas das acelerações

a) *Escalas das molas*

Já dissemos que o aparelho possuía dois tipos de molas, umas em espiral que designámos pela letra *A*, e outras em hélice a que démos a designação *B*. Para as destinguirmos fazemos seguir a letra de um índice que é um número gravado a punção. Só a

mola em espiral mais fraca não apresenta qualquer número e, por isso, passamos a designá-la por A_0. As outras são A_1, A_2, $B_{0,5}$, $B_{0,9}$, e $B_{1,1}$; os índices das molas B correspondem ao diâmetro, em milímetros, do arame de que são feitas.

Estas seis molas combinam-se em pares (A, B), interessando não a característica de cada uma, mas sim as de tôdas as combinações (A, B) possíveis.

Para fazer a determinação das características montámos as molas no torsiógrafo e imobilizámos o volante ao mesmo tempo que suspendíamos um prato com pesos na periferia do tambor. Na fita de papel registámos a posição do estilete para cada carga. Tôdas as determinações foram feitas com o eixo do estilete na posição 3.

1) *Combinações da mola* A_0

Tara do par $A_0 B_{0,5}$ . . . . . 22 gr

Tara dos pares $A_0 B_{0,9}$ e $A_0 B_{1,0}$ . . . . . 152 gr

Posições do estilete para cada carga

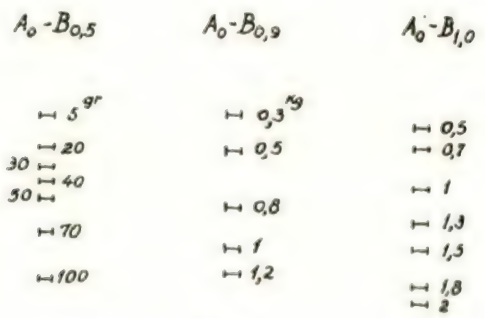


Fig. 4

Valores dos deslocamentos em função das cargas

QUADRO I

A_0 $B_{0,5}$		A_0 $B_{0,9}$		A_0 $B_{1,0}$	
Deslocamentos	Cargas	Deslocamentos	Cargas	Deslocamentos	Cargas
0 mm	27 gr	0 mm	452 gr	0 mm	652 gr
4,2	42	4,5	652	2,9	852
7,0	52	12,0	952	8,3	1152
9,0	62	17,5	1152	12,8	1452
11,0	72	21,0	1352	16,5	1652
15,5	92			21,5	1952
21,9	122			23,5	2152

Características

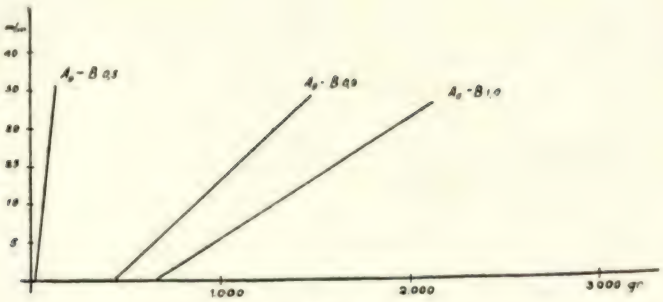


Fig. 5

2) *Combinações da mola* A_1

Tara . . . . . 152 gr

Posições do estilete para cada carga

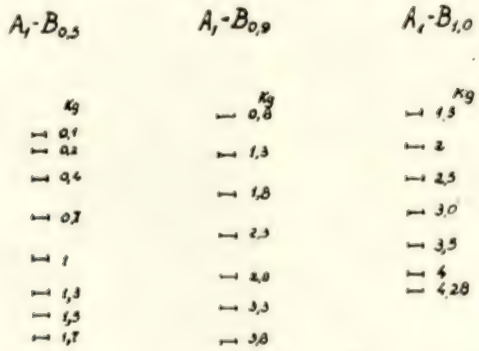


Fig. 6

Valores dos deslocamentos em função das cargas

QUADRO II

A_1 $B_{0,5}$		A_1 $B_{0,9}$		A_1 $B_{1,0}$	
Deslocamentos	Cargas	Deslocamentos	Cargas	Deslocamentos	Cargas
0 mm	252 gr	0 mm	952 gr	0 mm	1652 gr
2,1	352	5,2	1452	4,5	2152
5,6	552	10,5	1952	8,7	2652
11,0	852	16,2	2452	13,4	3152
16,5	1152	21,8	2952	17,7	3652
21,2	1452	25,8	3452	21,8	4152
24,0	1652	30,5	3952	23,7	4432
27,3	1852				

Características

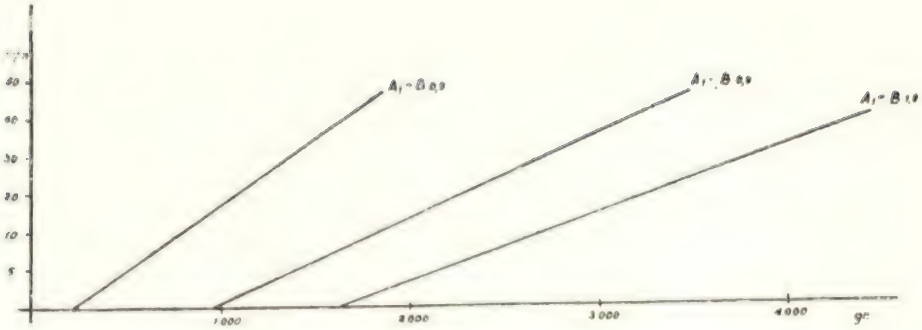


Fig. 7

3) *Combinações da mola* A_2

Tara . . . . . 152 gr

Posições do estilete para cada carga

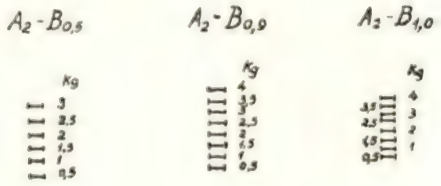


Fig. 8

Valores dos deslocamentos em função das cargas

QUADRO III

A_2 $B_{0,5}$		A_2 $B_{0,9}$		A_2 $B_{1,0}$	
Deslocamentos	Cargas	Deslocamentos	Cargas	Deslocamentos	Cargas
0 mm	0 gr	0 mm	0 gr	0 mm	0 gr
1,2	352	1,9	652	1,8	652
2,4	652	3,2	1152	3,0	1152
3,2	852	5,0	1652	4,5	1652
4,2	1152	6,5	2152	6,0	2152
6,1	1652	8,0	2652	7,6	2652
8,0	2152	9,5	3152	9,0	3152
9,8	2652	11,0	3652	10,2	3652
11,4	3152	12,6	4152	11,6	4152

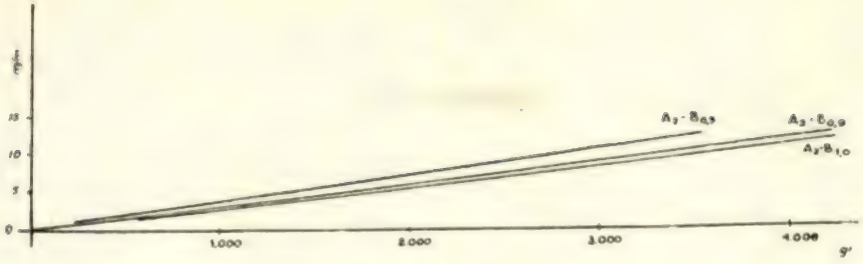


Fig. 9

b) *Determinação do momento de inércia do volante.*

O momento de inércia foi determinado por cálculo, dividindo o volante em volumes parciais cujos momentos de inércia eram fáceis de calcular.

Os resultados obtidos foram:

volume	495,95 cm^3
massa.	3,498 Kg
massa específica	7,05 Kg/dm^3
momento de inércia	$I = 58,47$ $Kg.cm^2$

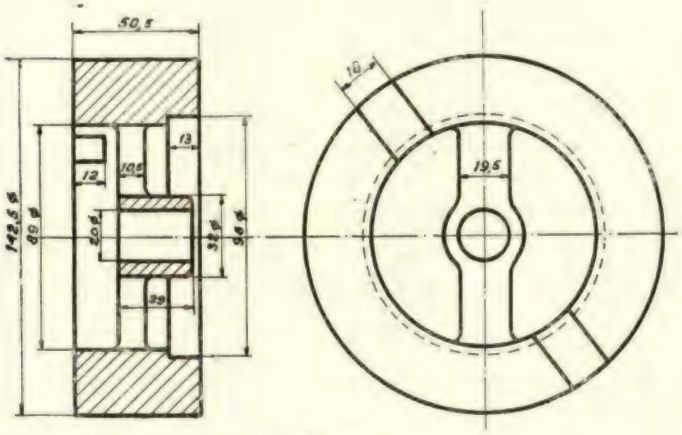


Fig. 10

c) *Escalas das acelerações.*

Como as escalas das molas se referem a fôrças aplicadas na periferia do tambor, vamos achar a massa equivalente à do volante concentrada no diâmetro exterior daquêle (14,8 cm).

Temos, então:

$$M = \frac{I}{r^2} = \frac{58,47}{7,4^2} = 1,063 \simeq 1,000 \text{ Kg.}$$

Estamos em condições e possuímos todos os elementos para calcular as escalas das acelerações registadas para os diferentes pares de molas na última coluna do quadro IV e que representam as acelerações sofridas pela massa do volante, suposta concentrada na periferia do tambor, quando o estilete se desloca de 1 mm, estando o seu eixo na graduação 3.

QUADRO IV

Pares de molas	tg γ	Escalas das molas	Escalas das acelerações
A_0 $B_{0,5}$	0,11	4,45 gr/mm	0,0435 (m/seg^2)/mm
A_0 $B_{0,9}$	1,07	42,7	0,417
A_0 $B_{1,0}$	1,58	63,1	0,617
A_1 $B_{0,5}$	1,48	59,1	0,580
A_1 $B_{0,9}$	2,32	92,9	0,910
A_1 $B_{1,0}$	2,87	114,2	1,120
A_2 $B_{0,5}$	8,00	320,0	3,140
A_2 $B_{0,9}$	8,30	332,3	3,250
A_2 $B_{1,0}$	8,97	360,3	3,520

Estes valores foram calculados, como já dissemos, com o estilete na divisão 3. Para as outras posições possíveis que são 6, 12 e 24, aquêles valores devem ser divididos respectivamente por 2, 4 e 8.

II) Determinação da ordenada base de integração.

A escolha da ordenada de referência é de primordial interêsse pois a curva primitiva vai depender fundamentalmente da sua posição.

Para avaliar da influência da ordenada média sôbre o valor do integral, fizemos a integração de uma mesma curva obtida no torsiógrafo em relação a duas ordenadas de referência que distanciavam entre si de 0,25 mm e os valores obtidos, em três pontos do trôço integrado, para cada um dos casos, foram:

ponto 2	25,2 mm/seg.	e	21	mm/seg.
ponto 15	— 42 »	e	10,5	»
ponto 30	— 84 »	e	31,5	»

A diferença entre os resultados obtidos é pequena de início, como é natural, mas torna-se apreciável depois. Não podemos, portanto, desprezar a escolha correcta da base de integração.

Várias hipóteses foram aventadas e depois abandonadas por não terem recebido a sanção da experiência até que, por fim, se julgou encontrar uma que, não estando em contradição com o espírito do problema, foi verificada experimentalmente.

A hipótese é a seguinte:

«A ordenada base de integração desloca-se em relação à posição de equilíbrio do estilete, de um valor que corresponde à resultante da fôrça centrífuga provocada por certas massas excêntricas (alavancas) e dos atritos que se opõem ao movimento do volante, e coïncide com a ordenada média do diagrama. Como o volante está montado em rolamentos

de esferas e gira num espaço fechado, as resistências do ar e de atrito são necessàriamente pequenas e podemos considerar a fôrça centrífuga como única responsável pelo desvio do zero».

Para verificar esta hipótese tirámos vários diagramas ao motor Deutz, do Laboratório de Máquinas, correspondentes a cargas diferentes e achámos, para cada um, a ordenada média. Do afastamento destas ordenadas da posição de equilíbrio do estilete tirámos os valores das massas excêntricas e comparámo-los.

Os diagramas obtidos foram:

P — F + 15 kg. M — A_1-$B_{1,0}$ N — 470 r. p. m.
E — 1 mm ◇ $^1/_3$ mm V — 10 m/m D — 600 mm

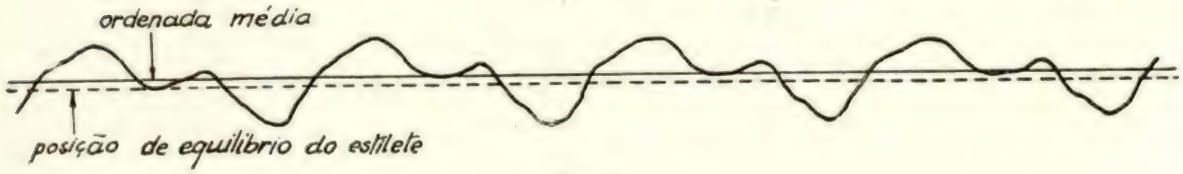


Fig. 11

P — F + 10 kg. M — A_1-$B_{1,0}$ N — 470 r. p. m.
E — 1 mm ◇ $^1/_3$ mm V — 10 m/m D — 600 mm

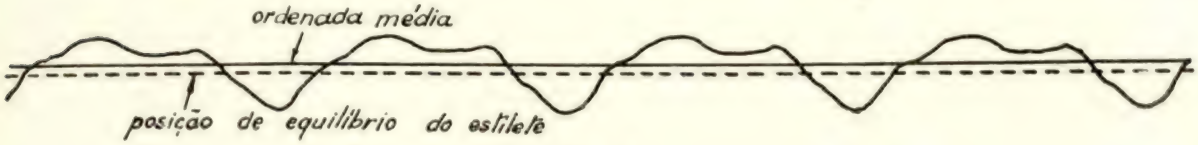


Fig. 12

P — F + 5 kg. M — A_1-$B_{1,0}$ N — 470 r. p. m.
E — 1 mm ◇ $^1/_3$ mm V — 10 m/m D — 600 mm

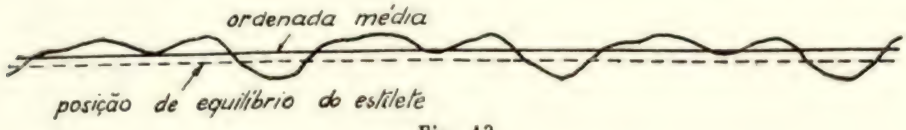


Fig. 13

P — F + 0 kg M — A_1-$B_{1,0}$ N — 490 r. p. m.
E — 1 mm ◇ $^1/_3$ mm V — 10 m/m D — 600 mm

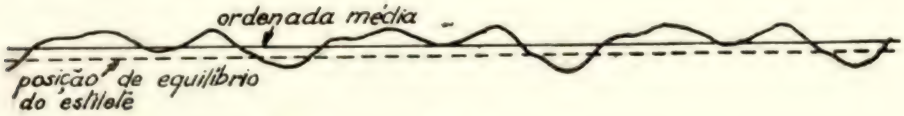


Fig. 14

P — 0 kg M — A_1-$B_{1,0}$ N — 500 r. p. m.
E — 1 mm ◇ $^1/_3$ mm V — 10 m/m D — 600 mm

Fig. 15

As velocidades registadas no segundo e terceiro diagramas são baixas. Êsses valores são substituídos pelos obtidos por interpolação da curva da velocidade em função da carga, que são, respectivamente, 476 e 483 r. p. m.

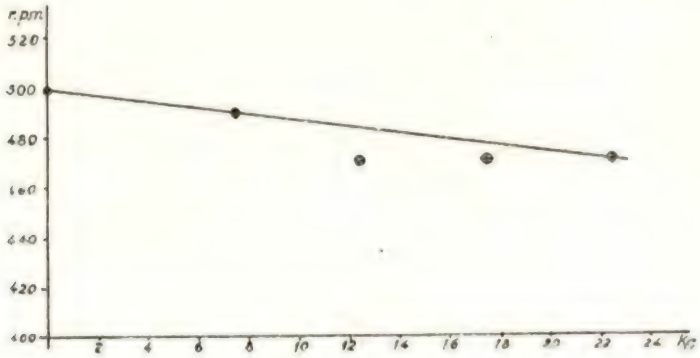


Fig. 16

No quadro seguinte temos os valores das massas que provocam o desvio do zero, para cada uma das cargas ensaiadas, supondo-as concentradas numa circunferência de 1 cm. de diâmetro.

QUADRO V

Carga	Desvio do zero	Fôrça centrífuga	Velocidade periférica	Massa
0 Kg	1,6 mm.	179.000 dines	106,0 cm / seg.	8,00 gr.
F + 0	1,4	157.000	104,0	7,30
F + 5	1,5	167.500	102,5	7,95
F + 10	1,5	167.500	101,0	8,16
F + 15	1,4	157.000	99,7	7,88

O valor médio da massa é, portanto, 7,86 gr, havendo um desvio máximo de 7,1 %. Êste êrro é absolutamente aceitável pois tem a ordem de grandeza dos erros cometidos em ensaios dêste tipo. Ficou assim justificada a hipótese apresentada para a escolha da ordenada que deve servir de base à integração.

Nota: — O valor da constante de integração não interessa conhecer na determinação do grau de irregularidade.

Antes de fazer a aplicação dêste método convém reparar que devido à construção do torsiógrafo, a parte do diagrama que fica acima da ordenada média corresponde a atrazos do tambor em relação ao volante e a que fica abaixo a avanços. Resulta daqui que, sendo a tangente à curva positiva, a velocidade relativa é negativa, e da mesma maneira, sendo a tangente negativa, a velocidade relativa é positiva. Para a velocidade de transporte acontece coisa semelhante: a área positiva corresponde a uma diminuição de velocidade do volante e a negativa a um aumento. Ficam assim justificados os sinais que afectam os valores das velocidades em face dos diagramas.

C) Determinação do grau de irregularidade pelo método B

Já expusemos os fundamentos dêste processo; vamos agora descrever a sua aplicação prática.

Aproveitaremos os diagramas do capítulo anterior que nos serviram para justificar a hipótese sôbre a ordenada base de integração.

Cada diagrama está acompanhado das seguintes indicações:

P — carga da máquina;
E — escala dos deslocamentos;
M — par de molas empregado;
V — velocidade da fita de papel que nos permite calcular a escala do tempo;
N — número de rotações da máquina;
D — diâmetro do tambor em que montámos a correia que transmite o movimento ao torsiógrafo.

As dimensões dos diagramas são bastante pequenas tornando-se necessário ampliá-los.

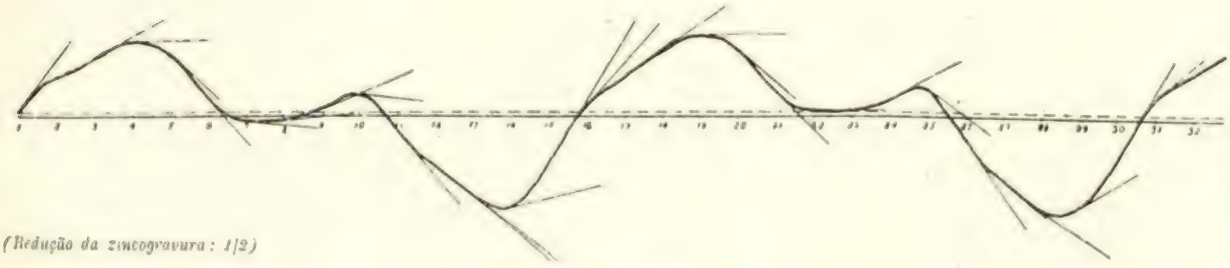
Feito isto, podemos fazer a sua derivação gráfica que, atendendo às escalas, nos fornece o valor da velocidade relativa em cada ponto. A velocidade de transporte é obtida por integração recorrendo ao intégrafo, depois de determinar, como já fizemos, a ordenada média. Traçando as curvas da velocidade relativa e da velocidade de transporte, obtemos imediatamente, por adição, a curva da velocidade absoluta.

O grau de irregularidade será o cociente da maior variação de velocidade registada nesta curva pela velocidade média periférica do tambor do torsiógrafo.

Dada a natureza dêste trabalho, não nos limitamos a registar apenas a maior variação de velocidade obtida, mas sim os seus valores correspondentes a um trôço do torsiograma. Permite-nos isso uma melhor comparação de resultados e mais seguras conclusões.

I) Carga do motor: Freio + 15 Kg

a) Velocidade relativa



(Redução da zincogravura: 1/2)

Fig. 17

Factor de ampliação	4	
Escala dos deslocamentos	1 mm	◇ 1/3 mm
Escala do tempo	1 mm	◇ 0,006 seg
Escala da velocidade.	1	◇ 55,5 mm/seg

QUADRO VI

Pontos	Derivadas	Velocidades mm/seg	Pontos	Derivadas	Velocidades mm/seg	Pontos	Derivadas	Velocidades mm/seg
1	+ 1,25	— 69,4	12	— 0,74	+ 41,0	23	0	0
2	+ 0,60	— 33,3	13	— 0,74	+ 41,0	24	+ 0,60	— 33,3
3	+ 0,50	— 27,6	14	+ 0,25	— 13,9	25	— 0,70	+ 38,9
4	0	0	15	+ 1,75	— 97,0	26	— 1,40	+ 77,6
5	— 0,95	+ 52,7	16	+ 1,10	— 61,0	27	— 0,75	+ 41,6
6	— 1,15	+ 63,8	17	+ 0,65	— 36,0	28	— 0,55	+ 30,5
7	— 0,10	+ 55,6	18	+ 0,65	— 36,0	29	+ 0,60	— 33,3
8	+ 0,10	— 5,6	19	0	0	30	+ 1,80	— 100,0
9	+ 0,50	— 27,7	20	— 0,85	+ 47,2	31	+ 0,90	— 50,0
10	— 0,10	+ 5,6	21	— 0,95	+ 52,7			
11	— 1,25	+ 69,4	22	0	0			

b) *Velocidade de transporte*

(Redução da zincogravura: 1/2)

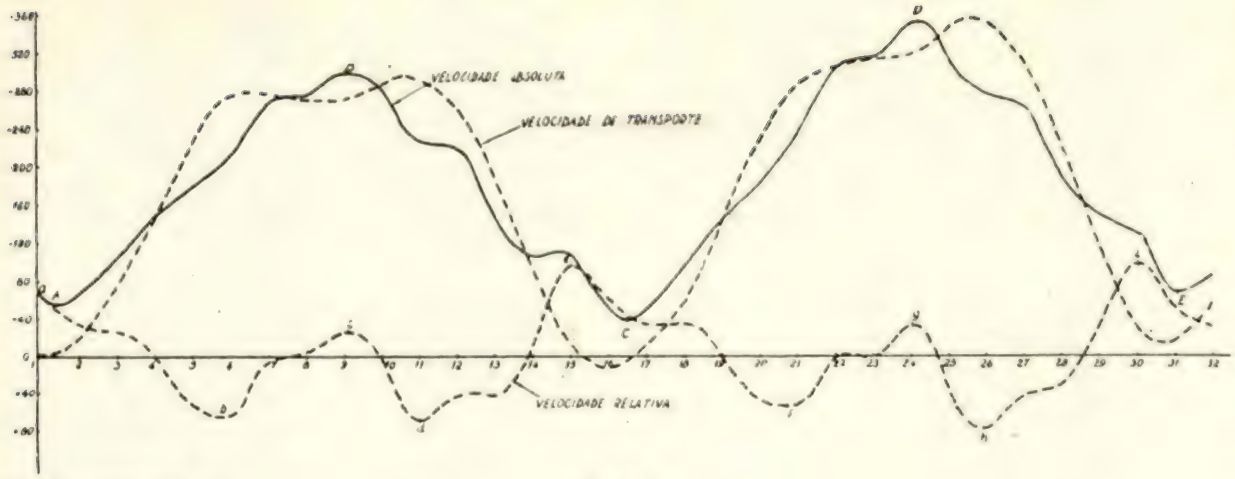
Fig. 18

Factor de ampliação	4
Escala do intégrafo	1 mm ◇ 50 mm²
Escala do tempo	1 mm ◇ 0,006 seg
Escala das molas	1 mm ◇ 1,12 m/seg²
Escala da velocidade	1 mm ◇ 21 mm/seg

QUADRO VII

Pontos	Ordenadas mm	Velocidades mm/seg	Pontos	Ordenadas mm	Velocidades mm/seg	Pontos	Ordenadas mm	Velocidades mm/seg
1	0	0	12	+ 12,5	— 262,0 + C	23	+ 15,0	— 315,0 + C
2	+ 1,0	— 21,0 + C	13	+ 9,0	— 189,0 + C	24	+ 15,2	— 319,0 + C
3	+ 3,8	— 79,8 + C	14	+ 4,4	— 92,5 + C	25	+ 16,6	— 349,0 + C
4	+ 7,2	— 151,0 + C	15	+ 0,5	— 10,5 + C	26	+ 16,8	— 353,0 + C
5	+ 11,0	— 231,0 + C	16	— 0,6	+ 12,6 + C	27	+ 14,6	— 307,0 + C
6	+ 13,2	— 277,0 + C	17	+ 0,6	— 12,6 + C	28	+ 10,6	— 222,5 + C
7	+ 13,2	— 277,0 + C	18	+ 2,8	— 58,8 + C	29	+ 5,5	— 115,5 + C
8	+ 13,0	— 273,0 + C	19	+ 7,0	— 147,0 + C	30	+ 1,5	— 31,5 + C
9	+ 13,0	— 273,0 + C	20	+ 11,0	— 231,0 + C	31	+ 0,8	— 16,8 + C
10	+ 13,8	— 290,0 + C	21	+ 13,8	— 290,0 + C	32	+ 2,8	— 58,8 + C
11	+ 14,0	— 294,0 + C	22	+ 14,6	— 307,0 + C	33	+ 5,6	— 117,5 + C

c) *Velocidade absoluta.*



Redução da zincogravura: 1/2)

Fig. 19

d) *Grau de irregularidade.*

Variações de velocidade:

Trôço	AB	— 244 mm/seg.
»	BC	+ 272 mm/seg.
»	CD	— 324 mm/seg.
»	DE	+ 290 mm/seg.

Os sinais + e — significam respectivamente, diminuição e aumento de velocidade.

Velocidade média

Atendendo a que estas variações de velocidade se verificam na periferia de um tambor de 600 mm de diâmetro, a velocidade média periférica é

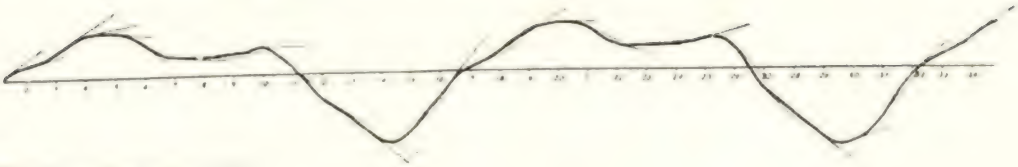
$$V_m = \frac{\pi \times 600 \times 470}{60} = 14750 \text{ mm/seg.}$$

Grau de irregularidade

Trôço	AB	$\frac{244}{14750} = 1{,}65\,\%$
»	BC	$\frac{272}{14750} = 1{,}84\,\%$
»	CD	$\frac{324}{14750} = 2{,}20\,\%$
»	DE	$\frac{290}{14750} = 1{,}97\,\%$

II) Carga do motor: Freio + 10 Kg.

a) *Velocidade relativa.*



(Redução da zincogravura: 1/2,5)

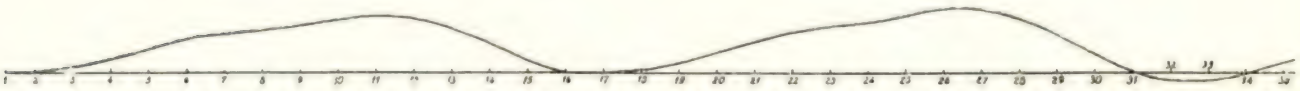
Fig. 20

Factor de ampliação. 4
Escala dos deslocamentos . . . 1 mm ◇ 1/3 mm.
Escala do tempo . . . . . 1 mm ◇ 0,006 seg.
Escala da velocidade . . . . . 1 ◇ 55,5 mm/seg.

QUADRO VIII

Pontos	Derivadas	Velocidades mm/seg.	Pontos	Derivadas	Velocidades mm/seg.	Pontos	Derivadas	Velocidades mm/seg.
1	+ 0,65	− 36,1	13	− 0,80	+ 44,4	25	+ 0,30	− 16,7
2	+ 0,30	− 16,7	14	− 0,40	+ 22,2	26	− 1,05	+ 58,3
3	+ 0,65	− 36,1	15	+ 1,03	− 57,2	27	− 1,10	+ 61,0
4	+ 0,22	− 12,2	16	+ 1,25	− 69,4	28	− 0,78	+ 43,3
5	− 0,06	+ 3,3	17	+ 0,45	− 25,0	29	− 0,76	+ 42,2
6	− 0,80	+ 44,4	18	+ 0,65	− 36,1	30	+ 0,38	− 21,1
7	− 0,06	+ 3,3	19	+ 0,57	− 31,6	31	+ 1,20	− 66,6
8	+ 0,10	− 5,6	20	+ 0,04	− 2,2	32	+ 0,90	− 50,0
9	+ 0,04	− 2,2	21	− 0,42	+ 23,3	33	+ 0,50	− 27,8
10	0	0	22	− 0,27	+ 15,0	34	+ 0,72	− 40,0
11	− 1,10	+ 61,0	23	0	0			
12	− 0,54	+ 30,0	24	+ 0,04	− 2,2			

b) *Velocidade de transporte*



(Redução da zincogravura: 1/2)

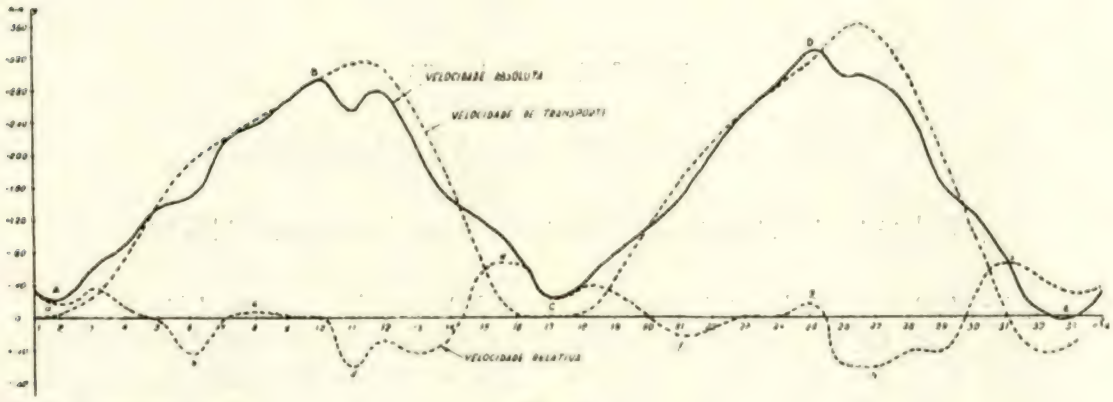
Fig. 21

Factor de ampliação. 4
Escala do intégrafo . . . . . 1 mm ◇ 50 mm²
Escala do tempo . . . . . 1 mm ◇ 0,006 seg
Escala das molas . . . . . 1 mm ◇ 1,12 m/seg²
Escala da velocidade . . . . . 1 mm ◇ 21 mm/seg

QUADRO 1X

Pontos	Ordenadas mm.	Velocidades mm/seg.	Pontos	Ordenadas mm.	Velocidades mm/seg.	Pontos	Ordenadas mm.	Velocidades mm/seg.
1	0	0	13	+ 11,8	− 248,0 + C	25	+ 15,0	− 315,0 + C
2	+ 0,2	− 4,2 + C	14	+ 7,8	− 164,0 + C	26	+ 17,0	− 357,0 + C
3	+ 1,2	− 25,2 + C	15	+ 3,0	− 63,0 + C	27	+ 17,0	− 357,0 + C
4	+ 3,5	− 73,5 + C	16	+ 0,2	− 4,2 + C	28	+ 14,5	− 305,0 + C
5	+ 6,5	− 136,5 + C	17	+ 0	0	29	+ 10,0	− 210,0 + C
6	+ 9,0	− 189,0 + C	18	+ 0,2	− 4,2 + C	30	+ 5,0	− 105,0 + C
7	+ 10,4	− 218,0 + C	19	+ 2,2	− 46,2 + C	31	+ 0,2	− 4,2 + C
8	+ 11,4	− 239,0 + C	20	+ 5,2	− 109,0 + C	32	− 2,0	+ 42,0 + C
9	+ 12,6	− 265,0 + C	21	+ 8,0	− 168,0 + C	33	− 1,8	+ 37,8 + C
10	+ 14.0	− 294,0 + C	22	+ 10,2	− 214,0 + C	34	− 0,2	+ 4,2 + C
11	+ 15,0	− 315,0 + C	23	+ 12,0	− 252.0 + C			
12	+ 14,5	− 305,0 + C	24	+ 13,5	− 283,0 + C			

c) *Velocidade absoluta*



(Redução da zincogravura: 1/2,5)

Fig. 22

d) *Grau de irregularidade*

Variações de velocidade

Trôço AB	− 272	mm/seg.
» BC	+ 268,8	»
» CD	− 304	»
» DE	+ 332	»

Velocidade média

$$V_m = \frac{\pi \times 600 \times 476}{60} = 14950 \text{ mm/seg}$$

Grau de irregularidade

Trôço AB	$\frac{272}{14950}$	= 1,82 %
» BC	$\frac{268,8}{14950}$	= 1,79 %
» CD	$\frac{304}{14950}$	= 2,04 %
» DE	$\frac{332}{14950}$	= 2,22 %

(Continua)

ERRATAS AO N.º 156

VIDA ESCOLAR E ASSOCIATIVA

Relatório da Direcção da "Técnica" no ano lectivo de 1943-44

Na pág. 448, 13.ª linha, 1.ª coluna, onde se lê «complexo» deverá lêr-se «complexa».
Na pág. 448, 19.ª linha, 2.ª coluna, onde se lê «destinção» deverá lêr-se «distinção».
Na pág. 449, 3.ª linha, 2.ª coluna, onde se lê «àquela» deverá lêr-se «aquela».
Na pág. 450, 27.ª linha, 1.ª coluna, onde se lê «diferente» deverá lêr-se «dificiente».
Na pág. 454, 12.ª linha, 1.ª coluna, onde se lê «17.428$00» deverá lêr-se «1.748$00».
Na pág. 454, 10.ª linha, 2.ª coluna, onde se lê «nós» deverá lêr-se «nos».
Na pág. 454, última linha, 2.ª coluna, onde se lê «que» deverá lêr-se «quem».

Aplicação de variáveis complexas e hiper-complexas ao estudo plano de Hidrodinâmica e de Elasticidade

PELO ENG.º CIVIL (U. P.) MANUEL PIMENTEL SANTOS

Certos problemas de Hidrodinâmica e de Electricidade são clàssicamente abordados mediante a utilização de resultados da Análise complexa. A elegância das soluções obtidas justifica que modernamente se tenha procurado a extensão de métodos análogos ao campo da Elasticidade plana. Daí a introdução de funções de variável hiper-complexa, com um êxito que deixa prever a vulgarização do seu emprêgo em problemas cujo tratamento é sempre delicado e trabalhoso.

Nêste estudo resumem-se e sistematizam-se alguns resultados essenciais para a aplicação de tais métodos em Hidrodinâmica e Elasticidade planas. Os capítulos referentes à Hidrodinâmica, mais resumidamente tratados por serem mais conhecidos, devem ser encarados como elemento de comparação relativamente à parte de Elasticidade.

I — Elementos da teoria das funções duma variável complexa

1 — *Operações algébricas sôbre números complexos*

Recordemos ràpidamente certas noções fundamentais.

Sabemos que um número complexo $x + iy$ é susceptível de representação vectorial; num sistema carteziano plano XOY (fig. 1) êsse vector terá a origem em O e as duas componente x e y. A extremidade do vector é um ponto P, de que se diz ter como *afixo* $x + iy$.

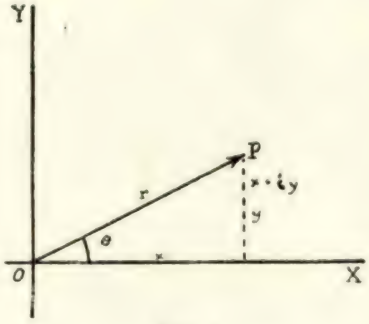


Fig. 1

A *soma* e *subtracção* de complexos têm as propriedades da soma e subtracção dos seus vectores representativos; é, por exemplo

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y').$$

Já o mesmo não acontece com o *produto*. É ainda um vector ou número complexo dado pela expressão

$$(x + iy) . (x' + iy') = (xx' - yy') + i(x'y + xy').$$

Pode obter-se formando o produto dos dois números como se se tratasse de dois polinómios, e substituíndo no resultado i^2 por -1. É comutativo, associativo e distributivo relativamente à adição.

A *divisão,* sempre possível excepto pelo número zero, define-se pela igualdade

$$\frac{x + iy}{x' + iy'} = \frac{(xx' + yy') + i(x'y - xy')}{x'^2 + iy'^2}$$

Ao número $x - iy$ chama-se *complexo conjugado* de $x + iy$. O produto de dois complexos conjugados é um número real; e qualquer número será real se fôr igual ao seu conjugado.

Se fizermos

$$x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

pondo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

temos a *forma trigonométrica do complexo*

$$x + iy = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

em que a quantidade essencialmente positiva r se chama *módulo* e representa o comprimento do vector. O ângulo θ, determinado a menos dum múltiplo inteiro de 2π é o *argumento* e representa o ângulo do vector com OX.

Dois complexos com o mesmo módulo e com argumentos diferindo dum múltiplo inteiro de 2π, são iguais.

O produto de $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ e de $z' = r'(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta')$ é

$$zz' = rr'[\cos(\theta + \theta') + i \operatorname{sen}(\theta + \theta')]$$

Para a divisão

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\theta - \theta') + i \operatorname{sen}(\theta - \theta')]$$

Sendo n inteiro, positivo ou negativo,

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

expressão quo contém as *fórmulas de Moivre*

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$$
$$(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta$$

A raiz n apresenta apenas n valores distintos

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right)$$
$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2\pi}{n}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta + (n-1).2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + (n-1).2\pi}{n}\right]$$

2 — *Funções monogenas da variável complexa*

Na definição de Cauchy, sendo $X = X(x, y)$ e $Y = Y(x, y)$, para que $Z = X + iY$ seja função de $z = x + iy$, é necessário não só que a cada ponto do plano z corresponda

um ponto do plano Z, mas também que Z admita em relação a z uma derivada perfeitamente definida. Para isso formemos o cociente

$$\frac{\Delta Z}{\Delta z} = \frac{X(x+\Delta x, y+\Delta y) - X(x,y) + i[Y(x+\Delta x, y+\Delta y) - Y(x,y)]}{dx + i\,dy}$$

Se, no ponto (x, y), as funções X e Y são contínuas e deriváveis, então quando o denominador tender para zero também o numerador tenderá; no limite teremos

$$\lim_{\Delta z = 0} \frac{\Delta Z}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy + i\left(\frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy\right)}{dx + i\,dy}$$

Para que êste limite seja independente de dy/dx, ou seja da maneira como Δz tende para zero, é preciso que

$$\frac{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial y}}{i}$$

Resultam as *condições de Cauchy*

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$$

Eliminando sucessivamente nestas duas equações X e Y, tem-se

$$(1\text{-A}) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

ou

$$\Delta X = 0 \qquad \Delta Y = 0$$

X e Y são portanto funções harmónicas se admitirem derivadas parciais contínuas e deriváveis por sua vez.

Note-se que dada uma função harmónica X(x, y) é possível determinar Y(x, y) tal que X + i Y (ou Y + i X) sejam monogenas. Com efeito, considerando no sistema (1-A) Y como incógnita, tal sistema é integrável se fôr $\Delta X = 0$, condição satisfeita por hipótese. As funções X e Y dizem-se então conjugadas.

3 — *Funções holomorfas ou analíticas*

Para que uma função f(z) seja *holomorfa* ou *analítica* num domínio D do plano z, é preciso que a cada ponto z de D corresponda um valor determinado de f(z), e que, em cada ponto de D, f(z) admita uma derivada única f'(z).

A extensão às funções holomorfas duma variável complexa das propriedades das funções de variável real pode fazer-se sem dificuldades.

Enunciemos agora, sem demonstração, algumas propriedades dessas funções.

4 — *Teorema de Cauchy*

Considerando uma curva rectificável fechada, ao longo da qual e no interior da qual a função f(z) é holomorfa, tem-se sôbre essa curva C

$$\int_c f(z)\,dz = 0$$

5 — *Fórmula de Cauchy*

Consideremos uma função f(z) holomorfa numa área A. Consideremos um ponto de afixo x na região D dessa área limitada por uma curva fechada C. Ter-se-á

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

6 — *Série do Taylor*

É possível desenvolver em série de Taylor uma função que seja holomorfa no interior e sôbre a circunferência dum círculo C de centro a. Sendo x um ponto interior a C, obter-se-á

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots\ldots$$

A partir dêste desenvolvimento pode demonstrar-se o *teorema de Liouville:* uma função holomorfa, uniforme e limitada em todo o plano é uma constante.

7 — *Série de Laurent*

Consideremos uma corôa circular limitada exterior e interiormente pelas circunferências C e C′ de centro a. Se fôr x um ponto dessa corôa torna-se possível escrever

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-a}\,dz + \frac{x-a}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz + \ldots + \frac{(x-a)^n}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{1}{x-a}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c'} f(z)\,dz + \frac{1}{(x-a)^2}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{c'}(z-a)\,f(z)\,dz + \ldots + $$

$$+ \frac{1}{(x-a)^n}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{c'}(z-a)^{n-1}\,f(z)\,dz + \ldots\ldots$$

ou

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + \frac{B_1}{(x-a)} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \ldots\ldots$$

Ao coeficiente B_2 do têrmo $1/x-a$ chama-se *resíduo* da função relativamente ao polo a.

8 — *Teorema dos resíduos*

Quando existem pontos singulares da função sob o símbolo de integral curvilíneo, demonstra-se que $\int_c f(z)\,dz = 2\pi i +$ soma dos resíduos de f(z) para os pontos singulares situados no interior de C. Êste teorema permite-nos o cálculo de muitos integrais sem ser preciso achar prèviamente a função primitiva.

II — Aplicação à hidrodinâmica plana

1 — *Equações do movimento*

Suponhamos que o movimento do fluído considerado obedece às condições seguintes:

a) O movimento é plano;

b) As fôrças de volume, de resultante $\vec{F}$ por unidade de massa, derivam duma função de fôrça;

c) O fluído é incompressível;

d) O turbilhão é nulo;

e) O movimento é permanente.

Da condição a) resulta que o fluído se move de tal forma que o campo de velocidades $\vec{W}$ se mantém rigorosamente constante em todos os pontos duma recta paralela a uma direcção fixa, e, além disso, é perpendicular a essa direcção, que tomamos como a do eixo dos z.

Sendo $\vec{i}$ e $\vec{j}$ os versores segundo OX e OY, ter-se-á um ponto P (x, y) e no instante t $\vec{W} = u(x, y, t)\,\vec{i} + v(x, y, t)\,\vec{j}$.

A função de fôrça U admitida pela condição b), bem como a pressão p e a densidade ρ serão igualmente funções de x, y, t. Na realidade, tanto o campo vectorial $\vec{W}$ como os escalares ρ e p não dependem do tempo, em virtude da condição e).

Não temos que nos ocupar do turbilhão $\vec{T}$, visto admitirmos que é nulo.

Como resultado das considerações feitas, podemos escrever

$$\vec{F}(P) = \overrightarrow{\text{grad}}\, U(P) \qquad \rho = \rho_0 \qquad \vec{W}(P) = \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi(P) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\vec{j}$$

Da última igualdade resulta que

$$u(x, y) = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \qquad v(x, y) = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}$$

A equação de continuïdade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho \vec{W}) = 0$$

reduz-se a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Portanto é possível encontrar uma função $\Psi(x, y)$ tal que $-v\,dx + u\,dy = d\Psi(x, y)$.

Ora como

$$(1) \ldots\ldots\ldots \qquad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

constatamos que tanto φ como Ψ satisfazem à equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$$

Como as condições (1) de Cauchy são satisfeitas podemos afirmar que φ e Ψ serão respectivamente as partes real e imaginária duma função monogena da variável complexa $z = x + iy$. Sendo assim

$$\varphi(x, y) + i\,\Psi(x, y) = f(x + iy) = f(z)$$

A esta função $f(z)$ dá-se o nome de *potencial complexo.*

Se definirmos por $W = u + iv$ uma *velocidade complexa,* é fàcil notar que ela será o complexo conjugado da derivada do potencial complexo em ordem à variável z. Com efeito

$$u + iv = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \Psi}{\partial y} = f'(z) \text{ pois } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Certos autores, entre os quais Escande, definem a velocidade complexa pelo conjugado do valor por nós indicado. Então, evidentemente, $W = u - iv = f'(z)$.

Conhecida φ, a determinação de p far-se-á pela equação simples a estabelecer

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] - U(x, y) + \frac{p(x, y)}{\rho_0} = 0$$

2 — *Características das funções φ e Ψ*

Recapitulando, notemos que as funções φ (potencial de velocidades) e Ψ (função de corrente) são harmónicas e conjugadas no sentido anteriormente exposto; determinada uma delas, a outra está determinada a menos duma constante aditiva.

Vejamos que as linhas de corrente, perpendiculares às linhas equipotenciais, são representadas por $\Psi = \text{const.}$

Com efeito, das equações (1) resulta

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$$

e as curvas $\varphi = \text{const.}$ e $\Psi = \text{const.}$ serão ortogonais.

O movimento plano e irrotacional dum líquido é assim representado por intermédio duma função de variável complexa

$$Z = f(z) = \varphi + i\,\Psi$$

3 — *Poços e fontes*

Considerando como arbitràriamente dado um potencial complexo $f(z)$ — satisfazendo, é claro, às condições implícitas na sua definição — temos um movimento cinemàticamente possível; a parte real da função representa o potencial de velocidades e o coeficiente de i a função de corrente.

Suponhamos que o potencial complexo seja da forma

$$f(z) = A \log z$$

sendo A um número real.

Como

$$f(z) = A \log re^{i\theta} = A(\log r + i\theta) = A \log r + Ai\theta$$

resulta

$$\varphi = A \log r \qquad \Psi = A\,\theta.$$

As trajectórias $\theta =$ const. são rectas saídas da origem, as linhas equipotenciais são circunferências tendo o centro na origem (fig. 2).

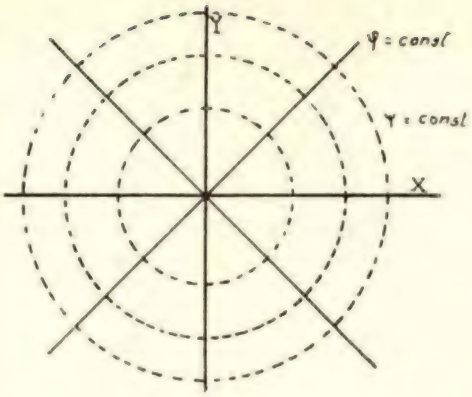


Fig. 2

Introduzamos um número complexo K cuja parte real seja a *circulação* ao longo duma curva fechada e cuja parte imaginária seja o *fluxo* através da mesma curva.

A definição de tais grandezas está implicita na expressão

$$K = [\int_c (u\,dx + v\,dy)] + i[\int_c (-v\,dx + u\,dy)] \quad . \; . \; (2)$$

correspondendo à definição usual no caso dos vectores, mas devendo atender-se a que, no caso do fluxo, o papel desempenhado pelo vector elemento de área $d\vec{\sigma}$ é substituído pelo vector $-i\,dz$ sendo $dz = dx + i\,dy$ o número complexo qu e representa o vector elementar de comprimento ds situado sôbre a tangente à curva e orientado no sentido em que ela é percorrida.

Do exame de (2) resulta que a parte real e a parte imaginária de K e de $\int f'(z)\,dz$ são idênticas, excepto no que diz respeito ao sinal da parte imaginária. Se tomarmos o complexo conjugado de K teremos então

$$\bar{K} = [\int_c (u\,dx + v\,dy)] - i[\int_c (-v\,dx + dy)] = \int_c f'(z)\,dz$$

Se $f(z)$ fôr uniforme e holomorfa no interior e sob a curva C o mesmo acontecerá com $f'(z)$; então será

$$\bar{K} = 0 .$$

Tanto o fluxo como a circulação são nulos.

Suponhamos agora

$$f(z) = K \log z = (a + ib) \log z$$

Para uma curva fechada C, envolvendo uma só vez a origem, é

$$\int_c f'(z)\,dz = K + \text{variação de } \log z \text{ ao longo de } C = K + 2\pi i$$

Logo

$$\bar{K} = -2\pi b + 2\pi a i \qquad K = -2\pi b - 2\pi a i$$

O fluxo vale $-2\pi a$ e a circulação $-2\pi b$. A origem $z = 0$ é um ponto singular para o campo W e nêle o turbilhão, se existir não estará definido; se b fôr diferente de zero será nulo em tôda a parte excepto na origem, onde terá a intensidade $-b/2\pi$ criando uma circulação no fluido.

Conforme a fôr positivo ou negativo, assim diremos que na origem existe um *poço* ou uma *fonte*, e aí o líquido será, respectivamente, absorvido ou emitido. A intensidade do poço ou fonte será $|a|/2\pi$.

Como $f'(z) = K/z$ a origem é um polo de resíduo K para $f'(z)$.

4 — *Caso do movimento não irrotacional*

Vejamos quais são as trajectórias de corrente no caso de b ser diferente de zero, isto é quando

$$f(z) = (a + ib) \log z.$$

Como

$$f(z) = (a + ib)(\log r + i\theta) = a \log r - b\theta + i(a\theta + b \log r)$$

será

$$\varphi = a \log r - b\theta$$
$$\Psi = b \log r + a\theta \quad .$$

A equação das linhas de corrente terá a forma

$$b \log r + a\theta = m \qquad m \text{ constante real}$$

ou

$$\log r = \frac{m}{b} - \frac{a}{b}\theta$$

ou, ainda

$$r = e^{\frac{m}{b}} \cdot e^{\frac{a}{b}\theta}$$

Trata-se, portanto, de espirais logarítmicas. Na origem, a um poço ou fonte sôbrepor-se-á um turbilhão.

III — Elementos da teoria das funções duma variável hiper-complexa

1 — *Hidrodinâmica plana e elasticidade plana*

A resolução de certos problemas de Hidrodinâmica plana pode-se conceber como a pesquiza duma função potencial satisfazendo à equação de Laplace

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x, y) = 0$$

ou seja, a pesquiza duma função harmónica. Vimos como a definição dum potencial complexo $f(z) = \Psi(x, y) + i\,\Psi(x, y)$ em que φ e Ψ são funções harmónicas nos permite um tratamento elegante do problema, mediante os conceitos simples da respectiva teoria de funções.

Ora nos problemas de Elasticidade plana, a função potencial deverá ser bi-harmónica, e não harmónica. Isto é, terá que obedecer a uma equação do tipo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x, y) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Compreende-se que se tenha procurado definir um *potencial hiper-complexo*

$$f(z) = \varphi(x, y) + j\,\Psi(x, y) + j^2\,\sigma(x, y) + j^3\,\tau(x, y)$$

satisfazendo com os seus quatro elementos à equacão (3), sendo além disso função holomorfa duma variável hiper-complexa $z = x + jy$ e tendo, é claro, a propriedade de descrever o estado do sistema elástico.

Veremos que o problema tem solução e como se pode obter esta.

2 — *Definição de número hiper-complexo*

Um número hiper-complexo z é formado por quatro grandezas reais ordenadas n_0, n_1, n_2, n_3, denominadas elementos do número. Podemos representá-lo simbòlicamente por

$$z = j^0 n_0 + j^1 n_1 + j^2 n_2 + j^3 n_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

devendo interpretar-se os sinais + como sinais de ligação, e sendo os quatro símbolos j^0 j^1 j^2 j^1 (unidades hiper-complexas) meros ordenadores dos elementos. Os números 0, 1, 2, 3 empregados nos j j consideram-se como índices. Podemos suprimir j^0 e substituir j^1 por j. A j chama-se unidade fundamental. Fica

$$z = n_0 + j\, n_1 + j^2 n_2 + j^3 n_3$$

A *igualdade* de dois hiper-complexos z e z' define-se pela condição de serem respectivamente iguais os elementos correspondentes em cada número.

3 — *Operações algébricas fundamentais*

A *soma* de dois hiper-complexos

$$z = n_0 + j\, n_1 + j^2 n_2 + j^3 n_3 \quad \text{e} \quad z' = n_0' + j\, n_1' + j^2 n_2' + j^3 n_3' \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

é o hiper-complexo

$$z = (n_0 + n'_0) + j\,(n_1 + n_1') + j^2\,(n_2 + n_2') + j^3\,(n_3 + n_3')$$

cujos elementos são a soma dos elementos dos hiper-complexos parcelas. A *diferença* obtém-se de forma semelhante.

O *produto* de dois hiper-complexos da forma (5) obtém-se formando o produto como se se tratasse de dois polinómios algébricos comuns e efectuando a redução dos termos em que j figure com expoente superior a 3 pela relação

$$j^4 + j^2 + 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

e outras duas obtidas multiplicando ambos os membros de (6) por j e por j^2. O polinómio do 3.º grau a que se reduz o polinómio do 6.º grau prèviamente obtido fornece a definição procurada do produto. Note-se o paralelismo desta definição com a forma como é obtido o produto de dois complexos vulgares; para êstes a relação (6) é substituída por

$$i^2 + 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

sendo i a unidade imaginária ordinária.

A condição (6) pode pôr-se

$$(j^2 + 1)^2 = 0$$

tal como a condição

$$\Delta f = 0$$

se transformou no campo hiper-complexo em

$$\Delta\,\Delta f = 0,$$

ou, ainda

$$\Delta^2 f = 0.$$

A definição de *potência* de expoente positivo ou nulo é imediata. Registe-se desde já que as notações usadas com as unidades hiper-complexas se justificam em face do quadrado e do cubo de j coincidirem respectivamente com j^2 e j^3. Duma maneira geral, poderemos escrever

$$j^{2k} = (-1)^{k+1} \cdot [(k-1) + kj^2]$$

$$j^{2k+1} = (-1)^{k+1} \cdot [(k-1)j + kj^3]$$

Uma vez definido o cociente, a extensão da definição de potência ao caso de expoente negativo é também imediata.

O *cociente* de dois hiper-complexos z' e z'' é o hiper-complexo z que multiplicado por z'' dá z'. Pondo o resultado procurado z sob a forma

$$z = a + jb + j^2 c + j^3 d$$

os elementos a, b, c, d determinam-se fàcilmente, calculando pela regra conhecida o produto $z'' \cdot z$ e identificando cada um dos elementos resultantes ao elemento correspondente de z'. Teremos um sistema de quatro equações lineares em a, b, c, d. e êstes ficarão ùnivocamente determinados se o determinante do sistema fôr diferente de zero. Tal determinante vale

$$[(n_2'' - n_0'')^2 + (n_3'' - n_1'')^2]^2 = 0$$

Se introduzirmos um *módulo* do hiper-complexo dado por

$$|z''| = \sqrt{(n_2'' - n_0'')^2 + (n_3'' - n_1'')^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

vimos que a operação da divisão tal como a definimos só não tem sentido se o divisor fôr um hiper-complexo de módulo nulo.

4 — *Observação importante*

A variável hiper-complexa mais geral será

$$z = x + jy + j^2 u + j^3 v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

em lugar de $x + jy$. Mas como nas aplicações à Elasticidade plana nos basta a utilização desta forma mais restrita em que são nulos os dois últimos elementos, é a ela que nos referiremos no seguimento dêste estudo.

5 — *Forma canónica dos números hiper-complexos*

Procuremos reduzir os hiper-complexos à forma

$$z = \alpha + \beta w \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

dita *forma canónica* ou *de Levi-Civita,* por ter sido indicada a Luigi Sobrero por êste eminente matemático. As operações com os hiper-complexos debaixo desta forma tornar-se-ão muito mais simples. Os elementos α e β deverão ser complexos ordinários.

Um hiper-complexo

$$z = a + j\,b + j^2 c + j^3 d$$

pode pôr-se sob a forma, fàcilmente verificável

$$z = \left[(a - c) + \frac{3j + j^3}{2}(b - d)\right] + \left[c + \frac{3j + j^3}{2} \cdot \frac{3d - b}{2}\right](1 + j^2) \quad . \; . \; . \quad (11)$$

Se procurarmos qual o número hiper-complexo cujo quadrado vale — 1, ou seja, o hiper-complexo equivalente à unidade imaginária ordinária, obtemos justamente, a menos do sinal

$$i \longrightarrow \frac{3j + j^3}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Façamos então

$$\alpha' = a - c$$
$$\alpha'' = b - d$$
$$\beta' = c$$
$$\beta'' = \frac{3d - b}{2}$$

e ainda

$$w = 1 + j^2 .$$

Restará

$$z = \left(\alpha' + \frac{3j + j^3}{2}\alpha''\right) + \left(\beta' + \frac{3j + j^3}{2}\beta''\right) w$$

ou, com significado evidente de α e β,

$$z = \alpha + \beta w$$

em que α e β são complexos ordinários, em virtude de (12).

A *soma* de dois hiper-complexos sob esta forma será ainda, se $z_1 = \alpha_1 + w\,\beta_1$ e $z_2 = \alpha_2 + w\,\beta_2$

$$z_1 + z_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + w\,(\beta_1 + \beta_2) .$$

No *produto* devemos atender a que se verifica $w^2 = 0$. Portanto

$$z_1 \cdot z_2 = \alpha_1 \alpha_2 + w\,(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) .$$

O *cociente* obtém-se agora a partir de

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha_1 + w\,\beta_1}{\alpha_2 + w\,\beta_2}$$

multiplicando ambos os termos da fracção por

$$\alpha_2 - w\,\beta_2 .$$

Vem:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}{\alpha^2_2}\, w$$

A analogia com os complexos comuns é flagrante. Além disso, a operação tem sentido se o módulo de α_2 fôr diferente de zero. E como

$$\text{mod } \alpha_2 = \sqrt{\alpha'^2 + \alpha''^2} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = |z_2|$$

a condição confunde-se com a já anteriormente enunciada.

É fácil demonstrar o seguinte teorema respeitante ao produto, de que damos sem demonstração o enunciado:

Se o produto de dois factores é nulo, ou é nulo um dos factores ou ambos têem módulo nulo.

6 — *Módulo e argumentos*

É possível definir num hiper-complexo $z = \alpha + \beta w$, em que α e β são complexos comuns, as seguintes grandezas associadas:

módulo $\rho = \text{mod } \alpha$

argumento real $\theta = \arg \alpha$

argumento imaginário $p = \beta / \alpha$

com propriedades análogas às das grandezas correspondentes dos complexos ordinários, Assim, por exemplo, o módulo dum produto é igual ao produto dos módulos dos factores, e os argumentos dum produto são a soma dos módulos dos factores.

Como

$$z = \alpha + w\,\beta = \alpha\left(1 + w\,\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

resulta

$$z = \rho^{i\theta}\,(1 + w\,p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

forma equivalente à trigonométrica no campo complexo ordinário.

7 — *Fórmula de Moivre*

Como conseqüência imediata, tira-se

$$z^n = \rho^n\,\rho^{in\theta}\,(1 - w\,n\,p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

que se presta para o cálculo de potências de expoente inteiro e positivo, e ainda de expoente fraccionário e negativo, tomando

$$z^n = \rho^{n \log z}$$

Calculemos

$$z^n = (x + j\,y)^n\,.$$

Será

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$$

$$(x+j\,y)^n = \rho^n\left[\cos n\,\theta + \frac{n}{2}\,\text{sen}\,\theta\,.\,\text{sen}\,(n-1)\,\theta\right] + j\,\rho^n\left[\frac{3}{2}\,\text{sen}\,n\,\theta - \frac{n}{2}\,\text{sen}\,\theta\,.\,\cos\,(n-1)\,\theta\right] +$$

$$+ j^2\,\rho^n\left[\frac{n}{2}\,\text{sen}\,\theta\,.\,\text{sen}\,(n-1)\,\theta\right] + j^3\,\rho^n\left[\frac{1}{2}\,\text{sen}\,n\,\theta - \frac{n}{2}\,\text{sen}\,\theta\,.\,\cos\,(n-1)\,\theta\right]$$

Todos os elementos do hiper-complexo resultante são funções bi-harmónicas e todos éles se reduzem afinal a combinações lineares de quatro funções também bi-harmónicas, que são

$$\cos n\,\theta\,; \qquad \text{sen}\,n\,\theta\,; \qquad \cos\,(n-2)\,\theta\,; \qquad \text{sen}\,(n-2)\,\theta\,.$$

8 — *Funções holomorfas da variável hiper-complexa*

Considerando uma grandeza hiper-complexa

$$f = \varphi + j\,\Psi + j^2\,\sigma + j^3\,\tau$$

cujos elementos são funções das duas variáveis x e y, isto é

$$\varphi = \varphi\,(x, y)\,; \qquad \Psi = (x, y)\,; \qquad \sigma = \sigma\,(x, y)\,; \qquad \tau = \tau\,(x, y) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

diremos que f é função da variável hiper-complexa $z = x + j\,y$. A noção de holomorfia, definida no campo complexo ordinário, é de extensão imediata. Para que uma função f (z) da variável hiper-complexa $z = x + j\,y$ seja holomorfa num domínio D do plano z, é necessário que a cada ponto de D corresponda um valor determinado de f (z), e que em cada ponto do domínio a função f (z) admita uma derivada única f' (z).

A derivada é definida pelo limite do cociente

$$\frac{f\,(z) - f\,(z_0)}{z - z_0} \quad . \; . \; . \; . \;

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \tau}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} - 2\frac{\partial \tau}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

Se entre estas quatro relações eliminarmos três das funções-elementos, a resultante verifica a relação

$$\Delta \Delta F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Assim, tôda a função holomorfa da variável hiper-complexa $z = x + jy$ verifica com cada um dos seus quatro elementos a equação (18).

Existem variados tipos de funções holomorfas, de que nos limitamos a apresentar as mais usuais em Elasticidade, sem contudo, aprofundarmos o seu estudo. São elas

$$f = z \quad f = 1/z \quad f = z^n \quad f = 1/z^n \quad f = e^z \quad f = \log z \ , \ \text{etc.}$$

9 — *Teorema de Cauchy*

Comecemos por estabelecer a noção de integral hiper-complexo.

Consideremos no plano z um domínio D. Seja nesse plano uma curva rectificável R de extremos A e B, ao longo da qual a função $f(z)$ é holomorfa. Dividamos essa curva em pequenos arcos elementares correspondentes aos pontos $z_0 = x_0 + jy_0$, $z_1 = x_1 + jy_1, \ldots$ $\ldots z_n = x_n + jy_n$. Formemos a soma

$$\sum_1^n f(z_k)\,(z_k - z_{k-1})$$

Fazendo tender para zero os comprimentos dos arcos elementares, esta soma tenderá em geral para um limite que se designa por integral ao longo de R da função $f(z)$. Notá-lo-emos com o símbolo

$$\int_A^B f(z)\,dz$$

Posta esta definição, o *teorema de Cauchy* afirma que, se a curva R fôr fechada e não existirem pontos singulares da função na área assim limitada, o integral referido será nulo:

$$\int_A^B f(z)\,dz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

A demonstração faz-se de forma semelhante à do campo complexo ordinário.

10 — *Fórmula de Cauchy*

Considerando uma função f (z) holomorfa numa área limitada por uma curva fechada C, sendo z um ponto da curva e p um ponto interior à área, podemos escrever que

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-p} dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

em que

$$i = \frac{3j + j^3}{2}$$

11 — *Série de Taylor*

Considerando um círculo C de centro *a*, é possivel, mediante a aplicação da fórmula de Cauchy, desenvolver em série de Taylor uma função holomorfa de variável hiper-complexa, sendo a holomorfia estendida ao interior e à circunferência do círculo. Para um ponto p interior a C, será

$$f(p) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(p-a) + \frac{f''(a)}{2!}(p-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(p-a)^n + \ldots\ldots$$

12 — *Série de Laurent*

Sendo p um ponto duma corôa circular de centro *a*, e f (z) uma função holomorfa sôbre a corôa e no seu contôrno, tem-se

$$f(p) = A_0 + A_1(p-a) + A_2(p-a)^2 + \ldots + \frac{B_1}{(p-a)} + \frac{B_2}{(p-a)^2} + \ldots\ldots$$

IV — Aplicação à Elasticidade plana

I — *Equações elásticas nos sistemas planos*

No estudo da Elasticidade plana é necessário distinguir cuidadosamente duas noções que muitas vezes se confundem: a de *estado de deformações planas* e a de *estado elástico plano.*

Representemos por t_x e t_y as tensões segundo OX e OY, por t_{xy} a tensão tangencial não nula, por *u* e *v* as deformações segundo OX e OY. A deformação segundo OZ seria representada por *w*.

O *estado de deformações planas* refere-se a um corpo limitado por uma superfície prismática e por duas secções rectas, no qual se verifica ser constantemente nula a deformação *w* segundo OZ, e em que tôdas as tensões e deformações são independentes de z (OZ toma-se, evidentemente, paralelo às geratrizes do superfície).

O *estado elástico plano* refere-se a um corpo limitado por uma superfície prismática e por duas secções rectas *muito próximas,* no qual são nulas as três tensões t_x, t_y, t_{xy}.

O eixo dos z é orientado como no caso anterior. Tôdas as fôrças directamente aplicadas ou de ligação devem ser paralelas às faces planas, e uniformemente repartidas em toda a espessura. As faces planas estarão isentas de fôrças de superfície Note-se que o estado de deformações planas deverá também satisfazer a estas condições respeitantes às fôrças.

Todo o problema de deformações planas pode ser reduzido a um problema de esforços planos, e recíprocamente. Colocar-nos-emos, portanto, apenas no ponto de vista do estado elástico de esforços (caso de esforços plano).

É conveniente registar que se tem, respectivamente

no estado de deformações planas . . . . $t_z = \frac{(t_x + t_y)}{m}$ $\qquad w = 0$

no estado elástico plano . . . . . $t_z = 0$ $\qquad w = -\frac{1}{m E}(t_x + t_y) \cdot z$

Sendo X e Y as componentes da resultante das fôrças intrínsecas por unidade de massa, da eliminação das deformações e introdução das condições do estado elástico de esforços resultam as equações

$$\frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + Y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

$$\Delta\,(t_x + t_y) = -\frac{m+1}{m}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

com as condições ao contorno (f_x e f_y componentes da resultante das fôrças externas superficiais)

$$t_x \cos\alpha + t_{xy} \operatorname{sen}\alpha = f_x$$

$$t_{xy} \cos\alpha + t_y \operatorname{sen}_y \alpha = f_y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Supondo nulas as fôrças de massa, $X = Y = 0$, e as equações (21) reduzem-se a

$$\frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 t_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t_y}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial^2 t_{xy}}{\partial x\,\partial y} = 0$$

É possível determinar uma *função de tensão* (função de Airy), bi-harmónica, da qual se deduzam as componentes dos esforços e, conseqüentemente, das deformações. Nós vamos abordar o problema recorrendo às funções de variável hiper-complexa.

2 — *Introdução de funções hiper-complexas*

Eliminemos no sistema de equações (17) que traduz as condições de holomorfia duma função hiper-complexa f(z) a função-elemento Ψ. Para isso, basta derivar a primeira equação em ordem a x, a terceira em ordem a y, e somar. Obteremos o sistema

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \\ -\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Comparando com o sistema (23), vemos que é possível identificar

$$\begin{aligned} t_x &\ a - \sigma \\ t_y &\ a \quad \varphi \\ t_{xy} &\ a \quad \tau \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Concluímos que uma função holomorfa da variável hiper-complexa $z = x + jy$ pode pôr-se sob a forma

$$f(z) = t_y + j\,\Psi - j^2\, t_x + j^3\, t_{xy}$$

sendo então as suas condições de holomorfia coïncidentes com as equações de elasticidade do sistema plano considerado. Assim, um problema de Elasticidade plana pode reduzir-se à pesquiza duma função holomorfa. Inversamente, a uma função holomorfa dada corresponderá um certo estado de solicitações planas.

3 — *Condições ao contôrno*

As componentes dos esforços devem satisfazer sôbre o contôrno às equações (22). Suponhamos inicialmente que não existem fôrças aplicadas; $f_x = f_y = 0$. Designando por Φ (z) o integral indefinido

$$\Phi(z) = \int f(z)\, dz$$

demonstraremos que *ao longo do contôrno do sistema, o primeiro e o último elementos de* Φ (*z*) *devem ser constantes.*

Êste enunciado encontra fàcilmente a sua justificação na análise do significado elástico da noção de integral.

Consideremos então uma curva AB traçada num sistema plano, e notemos com dF_x e dF_y as componentes do esfôrço transmitido através dum elemento da curva, da porção do sistema à direita desta para a porção à esquerda (supõe-se o observador percorrendo a curva de A para B). Sabe-se que

$$dF_x = -\,t_{xy}\, dx + t_x\, dy$$

$$dF_y = -\,t_y\, dx + t_{xy}\, dy$$

Portanto

$$f(z)\,dz = (t_y + j\,\Psi - j^2\,t_y + j^3\,t_{xy})\,(dx + j\,dy) =$$

$$= (t_y\,dx - t_{xy}\,dy) + \ldots\ldots + j^3\,(t_{xy}\,dx - t_x\,dy) = -\,dF_y + \ldots\ldots - j^3\,dF_x \quad \ldots \quad (26)$$

em que escrevemos apenas os elementos que nos interessam. Será

$$\int_A^B f(z)\,dz = -\int_A^B d\,F_y + \ldots - j^3 \int_A^B dF_x \quad \ldots\ldots \quad (26\text{-A})$$

e o primeiro e o último elementos dêste integral representarão com sinal contrário as componentes F_y e F_x do esforço transmitido através da curva, da parte do sistema que fica à direita para a parte que lhe fica à esquerda.

O teorema enunciado demonstra-se agora imediatamente. Sejam A e B dois pontos do sistema. Formemos a diferença $\Phi\,(A) - \Phi\,(B)$ que representa $\int_A^B f(z)\,dz$ estendido a qualquer curva de extremos A e B. Fazendo coïncidir a curva A de integração com o contôrno, e como supuzemos não haver fôrças externas, os elementos extremos do integral devem anular-se. Portanto os elementos extremos de $\Phi\,(A)$ devem ser respectivamente iguais aos de $\Phi\,(B)$, como se pretendia mostrar.

A interpretação mecânica da noção de integral permite ainda tratar o caso de existirem fôrças externas aplicadas ao contôrno, como veremos em alguns exemplos.

5 — *O teorema de Cauchy traduz as condições de equilíbrio*

Consideremos como fechada a curva de integração e suponhamos que, na área por ela limitada, f (z) não tem pontos singulares, que corresponderiam a pontos de aplicação de fôrças externas. Sendo assim (isto é, se na região considerada não actuam fôrças externas) as fôrças aplicadas ao contôrno têm de estar em equilíbrio.

Suponhamos agora que uma fôrça externa (R_x, R_y) actua aplicada à região limitada pela curva. A função f (z) terá um ponto singular no ponto de aplicação da fôrça $\int f(z)\,dz \neq 0$. Tem-se

$$\int f(z)\,dz = R_y + \ldots\ldots + j^3\,R_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

O enunciado decorrente da igualdade (26-A) verifica-se, «mutatis mutandis» para o integral

$$\int_A^B (z - z_0)\,f(z)\,dz = -\,M_0 + \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27\text{-A})$$

para o momento M_0 dos esforços transmitidos, relativamente ao ponto $z_0 = x_0 + jy_0$ do sistema plano. O momento é dado pelo primeiro elemento, com sinal trocado, do integral (27-A).

6 — *Deformações*

Para termos as deformações u e v, calculamos respectivamente o primeiro e o segundo elementos das expressões integrais

$$\frac{-1+mj^2}{m\,E}\int f(z)\,dz = u + \ldots\ldots$$

$$\frac{m-j^2}{m\,E}\int f(z)\,dz = \ldots + vj + \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots (28)$$

em que m designa como habitualmente o coeficiente de Poisson e E o de elasticidade.

Não faremos a demonstração.

Das equações (17) resulta que considerando uma qualquer curva fechada no sistema plano, e mesmo no caso desta compreender na área que limita pontos singulares da função f (z), devem existir as seguintes relações entre os elementos da função hiper-complexa:

$$\begin{aligned} \varphi + m\,\tau &= 0 \\ m\,\Psi + \tau &= 0 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

7 — *Estudo dos pontos singulares*

Tomemos uma função holomorfa f (z) traduzindo um certo sistema de esforços planos. Vejamos se o facto de admitir num dos seus pontos uma singularidade da forma

$$\frac{k}{z-z_0} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

acarreta alguma restrição particular. Por k designamos uma constante hiper-complaxa da forma

$$k = \alpha + j\,\beta + j^2\,\gamma + j^3\,\delta \text{ (de elementos reais)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

a determinar de forma que o ponto singular corresponda, por exemplo, à aplicação duma fôrça externa (R_x, R_y).

Existem de facto limitações a que devem satisfazer, independentemente de qualquer outra condição, os elementos da constante k . Portanto, nem tôdas as singularidades dêste tipo são admissíveis.

Com efeito, para uma curva fechada envolvendo z_0, o cálculo do integral $\int f(z)\,dz$ dá

$$2\,\pi\,ik = 2\,\pi\,\frac{3\,j+j^2}{2}\,(\alpha + j\,\beta + j^2\,\gamma + j^3\,\delta) =$$

$$= \pi\,[-(\beta+\delta) + (3\,\alpha-\gamma)\,j + (\beta-3\,\delta)\,j^2 + (\alpha+\gamma)\,j^3] \qquad \ldots\ldots\ldots (32)$$

e atendendo às relações (29), terá que ser

$$\begin{aligned} \beta\,(\,m-1) &= \delta\,(3\,m-1) \\ \alpha\,(3\,m-1) &= \gamma\,(\,m-1) \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Estas condições devem juntar-se às que derivam da consideração da fôrça (R_x, R_y). Ora, para uma curva fechada envolvendo z_0 e nenhum outro ponto singular, o integral

$$I = \int_c f(z)\,dz$$

tem o valor (32) em que o primeiro e o último elementos devem igualar respectivamente R_x e R_y. Logo

$$\begin{aligned} -\pi(\beta+\delta) &= R_y \\ \pi(\alpha+\gamma) &= R_x \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

As quatro equações (33) e (34) determinam α, β, γ e δ, e portanto

$$k = \frac{R_x}{4\pi}[(m-1)+(3m+1)j^2]\frac{R_y}{4\pi}[(3m+1)j+(m-1)j^3]$$

8 — *Importância do método*

A engenharia moderna tende cada vez mais a recorrer ao estudo directo dos sistemas construtivos, empregando os resultados da análise matemática em concepções técnicas sucessivamente mais audaciosas. Em tais idéias de evasão à rotina, tem a Elasticidade plana um importante papel a desempenhar — e no seu campo o método dos hiper-complexos não será dos menos importantes. Em muitos casos permitirá mesmo evitar os escolhos por vezes invencíveis que outros processos apresentam.

Dois caminhos se apresentam naturalmente. Um dêles consistirá em analizar convenientemente certos tipos de funções holomorfas da variável hiper-complexa, procurando tirar dessa análise as conclusões que possam interessar o engenheiro. O outro reduzir se-á à pesquiza duma certa função hiper-complexa que se ajuste às condições do problema elástico. Na prática, os dois métodos andam ligados.

Terminaremos pelo desenvolvimento de alguns casos simples.

9 — *Estudo dum plano indefinido com uma fôrça R aplicada num ponto* (L. Sobrero)

Tomemos o eixo dos x na direcção de R e a origem no seu ponto de aplicação z_0.

$$f(z) = \frac{k}{z}$$

$$k = \frac{R}{4\pi}[(m-1)+(3m+1)j^2]$$

como resulta do § 7.

$$f(z) = \frac{\frac{R}{4n}\left[(m-1)+(3m+1)j^2\right]}{x+jy} = a+jb+j^2c+j^3d$$

donde

$$\frac{R}{4n}(m-1)+\frac{R}{4n}(3m-1)j^2 = (ax-dy)+j(bx+ay)+j^2(cx+by-2dy)+j^3(dx+cy)$$

e identificando

$$\begin{aligned} ax-dy &= \frac{R}{4\pi}(m-1) \\ bx+ay &= 0 \\ cx+by-2dy &= \frac{R}{4\pi}(3m-1) \\ dx+cy &= 0 \end{aligned}$$

donde se tira ($r^2 = x^2 + y^2$)

$$t_x = -c = -\frac{R}{4\pi}\frac{x}{r^2}\left[(m-1)+2(m+1)\frac{x^2}{r^2}\right]$$

$$t_y = a = \frac{R}{4\pi}\frac{x}{r^2}\left[(-m+3)+2(m+1)\frac{x^2}{r^2}\right]$$

$$t_{xy} = d = -\frac{R}{4\pi}\frac{y}{a^2}\left[(-1)+2(m+1)\frac{y^2}{r^2}\right]$$

Atendendo a (28) e visto $\int f(z)\,dz = k \log z$; vem desenvolvendo

$$u = -\frac{(m+1)R}{4\pi m E}\left[(3m-1)\log r + \frac{y^2}{r^2}(m-1)\right]$$

$$v = \frac{(m-1)^2 R}{4\pi m E}\frac{xy}{r^2}$$

10 — *Estudo da tracção simples*

Seja um sistema plano (fig. 3) de forma rectangular alongada, engastado por um dos lados e tendo aplicada no centro do lado oposto uma fôrça P paralela aos lados

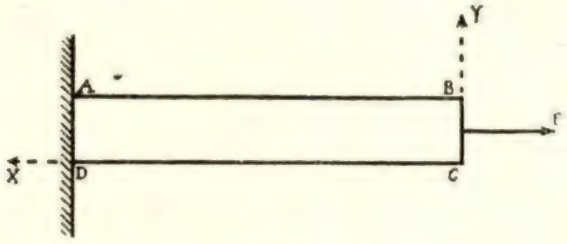


Fig. 3

maiores. Tomemos para eixos dos x e dos y respectivamente o comprimento dos lados menores.

Procuremos uma função de variável hiper-complexa

$$F(z) = a + j\,b + j^2 c + j^3 d$$

que representa a solicitação.

Como sôbre os lados maiores não há fôrças, esta função deve reduzir-se sôbre AB e CD a

$$j\,b + j^2 c$$

por nesses lados t_y e t_{xy} se anularem. Sôbre BC e AD deverá reduzir-se a uma função do mesmo tipo, pois apenas $t_x \neq 0$.

Ensaiando a função

$$F(z) = -P j^2$$

que é uma constante hiper-complexa, verificamos que ela satisfaz às condições ao contorno e que dá

$$t_x = P$$

$$t_y = t_{xy} = 0$$

Calculemos

$$\int F(z)\,dz = -P j^2 . z = -P j^2 (x + jy) = -Pxj^2 + Pyj^3$$

Abstraímos da constante de integração, que se traduziria numa constante aditiva nas componentes da deformação, como é de esperar, visto elas serem definidas a menos dum movimento rígido do sistema. As deformações dadas por (28) serão

$$u + \ldots = \frac{Px}{E} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + vj + \ldots = \ldots - \frac{Py}{E} + \ldots j$$

em que simbòlicamente se puzeram em evidência os termos da expressão integral que devem ser considerados.

11) — *Estudo da flexão simples*

A escolha da função hiper-complexa raras vezes se pode fazer por considerações tão simples como no caso anterior. Seja por exemplo o caso da flexão simples dum sistema

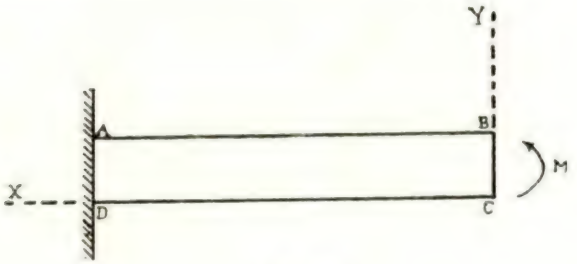


Fig. 4

plano idêntico ao anterior, sujeito à acção dum binário positivo M aplicado no lado livre menor (fig. 4).

Adoptemos as convenções anteriores e ensaiemos uma função do tipo

$$F(z) = kz + k'$$

em que

$$k = \alpha + \beta j + \gamma j^2 + \delta j^3$$
$$k' = \alpha' + \beta' j + \gamma' j^2 + \delta' j^3$$

sejam duas constantes hiper-complexas.

$$F(z) = (\alpha + \beta j + \gamma j^2 + \delta j^3)(x + jy) + (\alpha' + \beta' j + \gamma' j^2 + \delta' j^3) =$$
$$(\alpha x + \alpha' - \delta y) + (\beta x + \alpha y + \beta') j + (\gamma x + \beta y - 2\delta y + \gamma') j^2 + (\delta x + \gamma y + \delta') j^3 \quad . . . \quad (35)$$

Vejamos as indicações sôbre a forma da função tiradas das condições ao contorno. Sôbre os lados paralelos a OX, deve reduzir-se ao tipo

$$j b + j^2 c \quad . . . . . \quad (36)$$

Sôbre os lados paralelos a OY, já nada podemos dizer à priori. Apenas podemos afirmar, em virtude das relações (27) e (27-A), fazendo $z_0 = C$ (origem),

$$\int_C^B z F(z)\, dz = -M + \; . \; .$$
$$\int_C^B F(z)\, dz = 0 \quad . . . . . \quad (37)$$

Ensaiemos uma função do tipo (36). Para isso, anulemos em (35) os têrmos *a* e *d*, fazendo

$$\alpha = \gamma = \delta = 0$$
$$\alpha' = \beta' = \delta' = 0$$

As constantes hiper-complexas reduzem-se a

$$k = \beta j$$
$$k' = \gamma' j^2 \quad . . . . . \quad (38)$$

e (35) dá

$$F(z) = \beta x j + (\beta y + \gamma') j^2 = \beta z j + \gamma' j^2$$

Determinemos β e γ' pelas condições (37).

$$\int_C^B zF(z)\, dz = \int_C^B z(kz + k')\, dz = \int_C^B (kz^2 + k'z)\, dz = \left[k \frac{z^3}{3}\right]_C^B + \left[k' \frac{z^2}{2}\right]_C^B = k \frac{j^3}{3} + k' \frac{j^2}{2} =$$
$$= -\frac{2\beta + 3\gamma'}{6} - \frac{4\beta + 6\gamma'}{6} j^2$$

visto em C ser $z = O$ e em B $z = j$, e atendendo aos valores (38). Portanto

$$-\frac{2\beta + 3\gamma'}{6} = -M$$

$$\text{ou } 2\beta + 3\gamma' = 6M \quad . . . . . \quad (39)$$

Igualmente se tem

$$\int_C^B F(z)\, dz = \int_C^B (kz + k')\, dz = \left[k \frac{z^2}{2}\right]_C^B + \left[k'z\right]_C^B = (\beta + 2\gamma') = 0$$

ou

$$\beta + 2\gamma' = 0 \quad . . . . . \quad (40)$$

O sistema (39) (40) determina-mos

$$\gamma' = -6\,M$$
$$\beta = 12\,M$$

Portanto

$$F(z) = 12\,M\,j + (12\,M\,y - 6\,M)\,j^2$$

donde as expressões dos esforços

$$t_x = -12\,M\left(y - \frac{1}{2}\right)$$
$$t_y = t_{xy} = 0$$

A expressão de t_x pode pôr-se

$$t_x = -\frac{M}{12}\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Ora o momento de inércia da secção por unidade de espessura do sistema vale, em virtude da unidade de comprimento que escolhemos

$$I = \frac{1}{12}$$

Logo

$$t_x = -\frac{M}{I}\left(y - \frac{1}{2}\right) \quad e \quad \beta = \frac{M}{I}\,\gamma' = -\frac{M}{2I}$$

Calculemos, com a constante de integração suposta nula

$$\int F(z)\,dz = \int (kz + k')\,dz = \beta\,\frac{(x + jy)}{2}\,j + \gamma'\,(x + jy)\,j^2$$

Desenvolvendo, e atendendo a (28) vem para expressão das deformações

$$u = \frac{M}{EI}\,x\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

$$v = \frac{M}{2\,EI\,m}\,(mx^2 + y^2 - y)$$

Vê-se que o eixo neutro corresponde a $y = \frac{1}{2}$ e que, sôbre êle

$$u = 0 \qquad v = \frac{M}{2\,EI}\,x^2 - \frac{M}{8\,EI\,m}$$

Note-se ainda que se tem

$$\frac{M}{EI} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad \text{(teorema de Bernouilli)}$$

Seja ainda o mesmo sistema plano, sujeito a uma carga vertical no lado menor livre (fig. 5).

Agora já não é provável que os esforços sejam lineares em x e y. Experimentemos se serão quadráticos, mediante uma função do tipo

$$F(z) = kz^2 + k'z$$

em que k e k' sejam as constantes hiper-complexas da expressão geral do problena anterior.

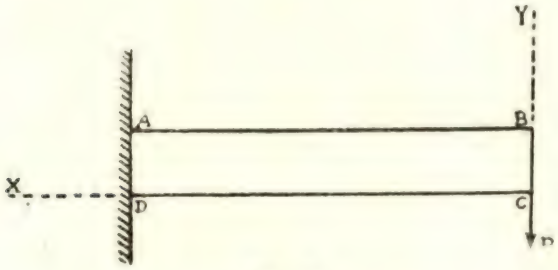


Fig. 5

No desenvolvimento desta expressão de F (z), em virtude do grande número de termos e da necessidade de deduzir os que forem semelhantes, convém adoptar as disposições de cálculo usuais nas operações com polinómios algébricos. Obtém-se, no final

$$F(z) = (\alpha x^2 - \delta y^2 - \gamma y^2 + \alpha' x - \delta' y) + j\ \beta x^2 + 2\alpha xy - \delta y^2 + \beta' x + \alpha' y) +$$
$$+ (\gamma x^2 + 2\beta xy - 2\delta y^2 + \alpha y^2 - 2\gamma y^2 + \gamma' x + \beta' y)\, j^2 + (\delta x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2 - 2\delta y^2 - \delta' x + \gamma' y)\, j^3 \quad \ldots (41)$$

Esta função, para $y = 0$ e $y = 1$, deve reduzir-se ao tipo $jb + j^2 c$, visto nos lados horizontais não actuarem fôrças externas.

Para $y = 0$

$$\alpha x^2 + \alpha' x = 0$$

$$\delta x^2 + \delta' x = 0$$

relações que devem ser satisfeitas qualquer que seja x, donde

$$\alpha = \delta = \alpha' = \delta' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

Para $y = 1$, atendendo a (41)

$$\gamma = 0$$
$$\beta + \gamma' = 0 \quad \text{ou} \quad \gamma' = -\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

Portanto

$$k = \beta j$$
$$k' = \beta' j - \beta j^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

e (41) reduz-se a

$$F(z) = j(\beta x^2 + \beta' x) + j^2(-\beta x + \beta' y + 2\beta xy) + j^3(\beta y^2 - \beta y) \quad \ldots\ldots (44)$$

Resta-nos determinar β e β', calculando

$$\int_C^B F(z)\,dz = \int_C^B (kz^2 + k'z)\,dz = \left[\frac{kz^3}{3}\right]_C^B + \left[\frac{k'z^2}{2}\right]_C^B = \frac{kj^3}{3} + \frac{k'j^2}{2} = \left(-\frac{1}{3}\beta + \frac{1}{2}\alpha\right) + \ldots + \beta' j^3$$

De (26)

$$-\frac{1}{3}\beta + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{6}\beta = -P \quad \text{ou} \quad \beta = -6P$$

$$\beta' = 0$$

Fica

$$F(z) = -6Pj + (6Px - 12Pxy)j^2 + (-6Py^2 + 6Py)j^3$$

donde os valores dos esforços

$$t_x = 12P\left(xy - \frac{y}{2}\right)$$

$$t_y = 0$$

$$t_{xy} = 6P(y - y^3)$$

Calculemos as deformações

$$\int (kz^2 + k'z)\,dz = kz^3/3 + k'z^2/2 = P(2y^3 - 3y^2) + 2jPx^3 + j^2P(4y^3 - 6x^2y + 3x^2 - 6y^2) + 6j^3P(xy - 6xy^2)$$

donde

$$u = \frac{6Px^2}{E}\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{12P}{mE}\left(2m + 1\right)\left(\frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{4}y^2\right)$$

$$v = -\frac{2P}{E}x^3 + \frac{6P}{mE}xy\left(1 - y\right)$$

Em cada uma destas expressões, o primeiro têrmo representa a deformação devida ao momento flector, e o segundo a deformação devida ao esfôrço tranverso.

13 — *Carga uniformemente distribuída*

Propomos como exercício a determinação dos esforços e deformações num sistema plano do mesmo tipo, carregado no lado superior com uma carga uniformemente repartida p (por unidade de comprimento). Com as convenções dos outros casos chega-se aos seguintes resultados:

$$t_x = p(6x^2 - y - 3x^2) + \frac{p}{5}(-20y^3 + 30y^2 - 12y + 1)$$

$$t_y = -p(3y^2 - 2y^3)$$

$$t_{xy} = p \,.\, 6xy(1 - y)$$

Registe-se que a função hiper-complexa que traduza o problema deve apresentar termos cúbicos em x e y.

14 — *Conclusão*

O estudo de casos de maior complicação e dificuldade pode agora ser progressivamente tentado. Generalizações terão que ser feitas, bem como aplicações cuidadosas e reflectidas das propriedades estudadas. Em particular, a transposição para coordenadas polares da representação hiper-complexa poderá render serviços inestimáveis.

BIBLIOGRAFIA

Luigi Sobrero	Elasticidade (em particular o cap. XI)
Escande	Hydraulique Générale
G. Juvet	Leçons d'Analyse Vectorielle
E. Lainé	Précis d'Analyse Mathématique
Velasco de Pando	Elasticidad y Resistencia de los materiales
Velasco de Pando	Arcos, bóvedas, placas

A INDÚSTRIA DE MINAS E O FOMENTO E A REORGANIZAÇÃO INDUSTRIAL

PELO ENG.º DE MINAS (I. S. T.) EDUARDO JOSÉ BELO CORREIA PEREIRA

A recente proposta, aprovada na Assembleia Nacional, sôbre o fomento e a reorganização industrial deverá encher de júbilo os verdadeiros portugueses que sentem a indispensável necessidade dum real desenvolvimento industrial no nosso país, do qual resultará um aumento de nível de vida e, portanto, de bem-estar.

A primeira fase da resolução dêste magno problema pode considerar-se realizada, pois consiste na sua imaginação, no levantamento do problema em franca evidência, para que todos os portugueses saibam que êle existe e que é necessário solucioná-lo. A segunda fase surgirá do bom entendimento e mútua compreensão entre os capitalistas e os órgãos dirigentes do Estado. Isto é, a iniciativa do capital particular deverá ser apoiada com o suficiente interêsse do Estado, de modo que aquêle ponha de lado o costumado receio e obtenha a indispensável confiança, elemento primário para o industrial caminhar firme e poder chegar a êxito. A terceira fase é a da realização prática, e nela têm papel fundamental os técnicos.

Impõe-se a aplicação eficaz da boa técnica a tôdas as indústrias, para que estas vivam e se desenvolvam.

É de suma importância que todos os engenheiros sintam aquêle papel, para que o seu trabalho e o seu esfôrço sejam encaminhados no desenvolvimento da indústria da sua emprêsa. A técnica do engenheiro de hoje deverá dirigir-se no sentido da maior produção e na obtenção de preços de custo, cada vez mais baixos, do elemento a produzir; a técnica mais perfeita é aquela que conduz a uma melhoria na qualidade do produto e a uma baixa no seu preço unitário.

É esta noção que, julgo, todo o engenheiro deverá ter neste momento, e assim encaminhar a sua inteligência, os seus esforços.

A indústria de minas é das que precisa desenvolver-se, não só pelo elevado número de operários que emprega, como porque grande parte dela constitue indústria de exportação e, como tal, pode ajudar a deminuir o prejudicial «déficit» da nossa balança comercial.

Ao engenheiro de minas se reserva importante missão. Grande número de engenheiros de minas teve um mau tirocínio de trabalho durante êste período de guerra. Os altos preços de compra, provenientes das necessidades dos países em guerra e da concorrência entre êles, deu ocasião a que, por vezes, pudesse ser completamente esquecida a função principal do técnico. Especialmente no caso do estanho e do volfrâmio, o preço de venda era tão elevado que aos erros técnicos correspondiam, apenas, leves deminuïções nos elevados lucros.

Fizeram-se verdadeiros atentados à mais elementar arte de minas, esquecendo-se, completamente, qualquer ideia de fazer obra, assegurando o futuro. Assim se passou a guerra, e a indústria de minas, que parecia dever estar habilitada à luta no mercado normal, encontra-se, na maior parte, se não pior, pelo menos, quási igual ao período de antes da guerra. Foi uma verdadeira calamidade!

Uma vez ouvi o gerente de emprêsa importante dizer, a propósito dum problema técnico em discussão, que visava uma deminuïção no preço de custo do minério, que a melhor técnica numa mina é uma boa guarda. Infelizmente o homem tinha razão.

Mas os tempos, para bem da Humanidade, vão mudar. E para que a indústria de minas viva e se desenvolva, terá de reorganizar-se e orientar-se devidamente.

O seu futuro depende da acção desenvolvida pelos quatro elementos: Comissão Reguladora do Comércio de Metais, Direcção Geral de Minas, Capitalistas, e Engenheiros de Minas. À Comissão Reguladora do Comércio de Metais, facilitando a venda, conseguindo bons mercados, fazendo incluir nos tratados comerciais com outros países os produtos das minas. À Direcção Geral de Minas, protegendo as suas minas, orientando-as, ensinando, fomentando a indústria. Julgo caber-lhe papel essencial no desenvolvimento das minas. Parece-me que deveria ela ser constituída, pelo menos no que diz respeito a fomento, pelo nosso escol da engenharia de minas, para que fôsse a mestra orientadora da técnica empregada nas nossas minas. Que fôsse ela a trazer até junto dos industriais tôdas as descobertas e inovações na arte de minas. Por exemplo, quão importante seria introduzir imediatamente na nossa indústria de minas, especialmente na de chumbo, estanho e volfrâmio, o novo processo de concentração de minério por densidade diferencial «Sink and Float» que está sendo já largamente empregado na Austrália, América, Brasil, etc., com elevado êxito, de que resultou um sensível abaixamento do preço de custo. No Brasil há já lavarias para tratar, em 24 horas, 10 000 toneladas de galena e blenda, instalações que dizem ser de reduzidas dimensões em comparação com a sua capacidade. Ora a capacidade de 10.000 toneladas é qualquer coisa de enorme: basta lembrarmo-nos que a maior lavaria de Portugal, a da Mina da Panasqueira, de elevadas dimensões e já com um enorme congestionamento de máquinas, tem uma capacidade máxima de 1.000 toneladas. Seria difícil conceber uma lavaria dentro dos mesmos moldes para 10.000 toneladas; será necessário um novo método de tratamento. Parece-me ser urgente o envio de um técnico competente a um país estrangeiro, onde tal processo se aplique, para que possamos, depois, utilizá-lo industrialmente nas nossas minas. Como lutar em mercados internacionais se não acompanharmos o desenvolvimento dos nossos concorrentes?

Outro problema que urge resolver é o da fundição de estanho. Torna-se necessário, como país produtor de cassiterites, obtermos rendimentos de fundição iguais aos conseguidos lá fora.

Enfim, em meu entender, pode ser a acção da Direcção Geral de Minas, por intermédio do Fomento Mineiro, de elevada influência para o desenvolvimento da indústria de minas em Portugal.

Ao capitalista compete adquirir a confiança nas nossas possibilidades mineiras, afastando a ideia de ver o seu capital rehavido em 3 meses de actividade da sua mina. Os capitalistas portugueses tiveram sempre grande aversão ao emprêgo dos seus capitais na indústria de minas, razão pela qual as maiores e melhores minas portuguesas, sobretudo as metálicas, estão em mãos estrangeiras.

Aos engenheiros de minas pede-se uma boa técnica essencialmente orientada nos preços de custo, boa organização de trabalho, máximo rendimento do operário e das máquinas, coordenação constante de elementos estatísticos, aplicação de métodos de eficiência de trabalho, com pagamento de bónus, não com o fim do operário dispender mais energia do que o seu físico consente, mas para que êle próprio organize os seus movimentos, o seu modo de trabalhar tendente a evitar os prejudiciais «tempos perdidos», etc.

Enfim, é grande a tarefa que se depara na nossa frente, mas estejamos certos de que, se todos os que trabalham ligados à indústria de minas muito quiserem desenvolvê-la, muito poderão fazer.

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

Jazigos portugueses de cassiterite e de volframite

Por J. M. COTELO NEIVA

Comunicações dos Serviços Geológicos de Portugal, tômo XXV — 1944. — Prêço 50$00.

É um extenso trabalho, que ocupa totalmente êste volume das Comunicações, de grande interesse quer sob o ponto de vista petrográfico quer metalogénico.

Pelo interesse que êste estudo oferece aos engenheiros de minas trascrevemos o *plano do trabalho* por que o A. inicia:

I — Uma província petrográfica hercínica.
II — Uma província metalogénica estanífera e tungsténica.
III — Classificação dos jazigos portugueses de cassiterite e de volframite.
IV — Estudo de alguns jazigos primários de cassiterite e de volframite (Lagares-do-Estanho, Adoria, Bessa, Penedo-Redondo, Bejanca).
V — Estudo de depósitos clásticos de cassiterite e de volframite.
VI — Fenómenos de contacto, de substituïção e de metasomatismo nos jazigos primários de cassiterite e de volframite e seus factores geoquímicos.
VII — Génese dos jazigos de cassiterite e de volframite.
VIII — Conclusões.

Chamamos a atenção para a carta mineira, cujo fundo geológico se basea na Carta de 1899 mas que o A. teve o cuidado de actualizar dentro das possibilidades da escala (1: 1.000.000), e para os quadros de paragéneses propostos para os jazigos estudados em detalhe, em que considera as fases magmática, hidrotermal e supergénica, pela fácil compreensão de conjunto que êstes dois elementos permitem.

Aquêles engenheiros de minas, que não tenham ocasião de lêr tôda a obra, tirarão proveito da leitura das Conclusões que lhe dará ideias claras sôbre a mineralização estano-volfrâmica do País e, ainda, para os que possam fazer a leitura completa quere-nos parecer aconselhável iniciá-la por êste capítulo porque lhes permitirá, a todo o momento, uma melhor apreciação crítica do trabalho.

Numerosas estampas com muito boas microfotografias valorizam-no e é lamentável que as fotografias, inseridas no texto, apresentem uma impressão defeituosa que as torna de interpretação confusa.

Uma bibliografia muito completa termina a obra que é, sem dúvida, a mais valiosa contribuïção publicada até hoje para o estudo metalogénico do País; façamos votos para que não seja um simples acidente na bibliografia geológico-mineira portuguesa.

D. T.

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Periódicas

ARGENTINA

CIENCIA E TÉCNICA — Março de 1945.
LA ENGENIERIA — Fevereiro de 1945.

BRASIL

ENGENHARIA — Março e Abril de 1945.

CHILE

REVISTA DE CAMINHOS — Novembro - Dezembro — 1944.

ESPANHA

DYNA — de Maio 1945.
CEMENTO — Maio de 1945.
REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS — Maio de 1945.

PORTUGAL

BOLETIM DA SOCIEDADE GEOLÓGICA DE PORTUGAL — Vol. VI — Fasc. III.
BOLETIM DA JUNTA NACIONAL DE CORTIÇA — Maio de 1945.
BOLETIM GERAL DAS COLÓNIAS — Dezembro de 1944 e Janeiro, Fevereiro e Abril de 1945.
BROTÉRIA — Maio de 1945.
CLÍNICA HIGIENE E HIDROLUGIA — Abril de 1945.
ESTUDOS — Fasc. V — Ano XXII.
GAZETA DOS CAMINHOS DE FERRO — 1 e 16 de Maio de 1945.
GIL VICENTE — Março - Abril 1945.
OCIDENTE — Maio de 1945.
PORTUCALE — Janeiro - Abril de 1945.
REVISTA DA ORDEM DOS ENGENHEIROS — Maio de 1945.
SEARA NOVA — N.os 926 a 930.
O TRIPEIRO — N.º 1 — Pôrto.

SUÍÇA

BULLETIN OERLIKON — N.os 244, 425, 246, 247, 248, 249 e 250.

624.131

Vibrações e trepidações dos solos — *A. Napole Neto.*
Revista Politécnica, pág. 299, Setembro (1944).

624.2

Pontes em betão

Tendências modernas en las grandes obras de hormigon armado — *A. Vera.*
El Ingeniero, n.º 58, pág. 5, (1944).

624.9.042.4

Efectos del viento en las construcciones — *Mendizabal.*
Revista de Obras Públicas, pág. 182, Maio (1945).

625.282

Particularidades de la construccion de locomotoras — *Massanet.*
Dyna, pág. 215, Maio (1945).

625.7

Construcción de carreteras en terrenos poco resistentes.
Revista de Obras Públicas, pág. 165, Abril (1945).

625.722

Piquetagem dos alinhamentos circulares por meio da régua de cálculo — *F. Ferreira Chaves.*
Revista da Ordem dos Engenheiros, n.º 15, pág. 132, (1945).

627.8

Comporta reguladora automática.
Dyna, pág. 242, Maio (1945).

627.81

Albufeiras de usos múltiplos — *A. Zuzarte de Mendonça.*
Revista da Ordem dos Engenheiros, n.º 14, pág. 46, (1945).

627.821

Presas de contrafuertes — *Mendia e F. Casado.*
Revista de Obras Públicas, pág. 195, Maio (1945).

627.824.7

Las presas de embalse de Córdoba. — *D. Stevenazzi.*
El Ingeniero n.º 60, pág. 62, (1944).

627.824.7

Dique «La Viña» — *S. Durieux.*
El Ingeniero, n.º 60, pág. 81, (1944).

627.83

Aprovechamiento integral de la energia de pie de presa en los embalses en derivacion — *C. S. Garcia.*
Revista de Obras Públicas, n.º 2757, pág. 1, Janeiro (1945).

628.238

Piezas de desahago tipo «D» para columnas de desagüe-ventilacion — *Rossel.*
La Ingenieria, pág. 112, Fevereiro (1945).

629.12.01

Cálculo de la resistencia de revestimientos aplicados a la construccion naval — *I. A. Gavrilot.*
La Ingenieria, pág. 962, Dezembro (1944).

666.96

Várias notas sobre los métodos de dosificar la cal libre Ca $(OH)_2$ en las pastas fraguadas de cemento — *G. B. Hevvaiz.*
Cemento y Hormigón, vol. XI, n.º 131, pág. 26.

669.1 : 345.8

Aplicaciones técnicas del análisis espectroquímica de emission cuantitativo en siderurgia — *Monserrat.*
Dyna, pág. 222, Maio (1945).

691.32

Los aridos en el hormigon — *F. G. Simon.*
Revista de Obras Públicas, pág. 100, Março (1945).

691.54 : 666.954.4

Cementos siderurgicos — *J. Câmara.*
Revista de Obras Públicas, pág. 133, Abril (1945).

693.55

Cálculo general de las dimensiones y de las tensiones en las vigas de hormigon con armaduras pretensadas.
Revista de Obras Públicas, pág. 167, Abril (1945).

694.631

Forjado para pisos — *Mozquiz.*
Revista de Obras Públicas, pág. 124, Abril (1945).

531.225

Cálculo tubular de vigas continuas de dos tramos — *Marin Toyos.*
Revista de Obras Públicas, pág. 202, Maio (1945).

532.5

El golpe de ariete — *Vallarino.*
Revista de Obras Públicas, pág. 136, Abril (1945).

534.84

Ensaios gerais de som.
A Arquitectura Portuguesa, n.º 118, pág. 15, Janeiro (1945).

539.41

A noção de coeficiente de segurança e o cálculo do concreto armado no estádio III — *T. von Langendonck.*
Engenharia, pág. 227, Fevereiro (1945).

621.312

Generalidades sobre la industria de produccion, transporte y distribución de energia eléctrica.
Dyna, pág. 230, Maio (1945).

621.313

Un nouveau dispositif de mise en paralléle automatique: Le synchronisateur ultrarapide — *A. Gantenbein.*
Bulletin Oerlinkon, n.º 249, pág. 1600, (1944).

621.314

Appareils de protection automatique pour transformateurs de tension — *K. Widmer.*
Bulletin Oerlikon, n.º 250, pág. 1614, (1944).

621.315.05

Comparacion del custo de transmission de energia a gran distancia por corrientes alterna y continua.
Dyna, pág. 250, (continuação) Maio (1945).

621.316

Le nouveau relais Limitherm — *O. Naef.*
Bulletin Oerlikon, n.º 247, pág. 1582, (1944).

621.316.1.5.066

Interrupteurs de commande modernes pour installations électriques — *H. Morf.*
Bulletin Oerlikon, n.º 250, pág. 1607, (1944).

621.39

A T. S. F. e as correntes fortes — *M. Amaro Vieira.*
Revista da Ordem dos Engenheiros, n.º 15, pág. 110, (1945).

621.7

Metalurgia de pó — *V. Chiverini.*
Engenharia, pág. 133, Dezembro (1944).

621.74.04

Aplicacion técnica de la fundición inyetada y prensada.
Dyna, pág. 245 (continuação), Maio (1945).

621.78

Tratamientos térmicos de los metales — *A. L. Blanco.*
La Ingenieria, pág. 100, Fevereiro (1945).

621.78

Estudo da influência de um aquecimento localizada nas propriedades mecânicas de uma barra de aço — *P. Avancini.*
Revista Politécnica, pág. 289, Setembro (1944).

621.783.03

Equipos para templado y recocido continuo de piezas de metal — *D. J. Davies.*
La Ingenieria, pág. 116, Fevereiro (1945).

624.041

Construcciones con membranas diedricas — *R. Pick.*
La Ingenieria, pág. 103, Fevereiro (1945).

624.04

Factores de forma e factores de carga — *T. von Langendonck.*
Revista Politécnica, n.º 145, pág. 261, (1944).

624.093

Cálculos rápidos de las vigas y losas de hormigón armado con armaduras sencillas o dobles — *J. Isakov.*
La Ingenieria, pág. 90, Fevereiro (1945).

624.093 : 539.214

Las teorias plasticas sobre la resistencia de las vigas de hormigon armado.
Revista de Obras Públicas, pág. 216, Maio (1945)